RAZGRANATA TEORIJA TIPOVA KAO INTENZIONALNA LOGIKA

Lojkić, Goran

Sveučilište u Zagrebu

Hrvatski studiji

Goran Lojkić

RAZGRANATA TEORIJA TIPOVA KAO INTENZIONALNA LOGIKA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
Prof. dr. sc. Srećko Kovač

Zagreb, 2018.

University of Zagreb

University Department for Croatian Studies

Goran Lojkić

RAMIFIED TYPE THEORY AS INTENSIONAL LOGIC

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
Prof. dr. sc. Srećko Kovač

Zagreb, 2018

Informacije o mentoru

Rođen u Zagrebu 1957. Diplomirao filozofiju i sociologiju na Filozofskom fakultetu 1981., magistrirao na Fakultetu političkih znanosti 1986. i doktorirao na Filozofskom fakultetu 1992. godine. Boravio je na studijskom boravku na Sveučilištu u Kölnu 1989/1990. Radi na Institutu za filozofiju u Zagrebu od 1986., gdje je voditelj znanstvenih projekta (*Logičke strukture i intencionalnost* 2007.–2012., *Logika, modalnosti i jezik* 2002.–2006.). Predaje logiku na Hrvatskim studijima od 1992., a 2004.–2012 i na Sveučilištu u Osijeku. Autor je knjiga *Logičko-filozofijski ogledi* (2005.) i *Logika kao 'demonstrirana doktrina'* (1992.), udžbenika *Logika* (8. izd. 2004.) i suautor (s B. Žarnićem) udžbenika *Logička pitanja i postupci* (2008.). Objavio je oko četrdeset članaka u međunarodnim i hrvatskim časopisima i zbornicima. Redovito nastupa na znanstvenim skupovima u Hrvatskoj i inozemstvu. Njegov sadašnji interes uključuje logiku vjerovanja i znanja, formalizaciju ontologije, logiku skupnoga odlučivanja i povijest logike.[1]

Prof. Kovač trenutačno vodi projekt *Logika, pojmovi i komunikacija*, kojega je ovaj doktorski rad dio i koji financira Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2014-09-9378.

[1]Životopis je preuzet s internetskih stranica Hrvatskih studija: `https://www.hrstud.unizg.hr/djelatnik/srecko.kovac` (stranica posjećena: 1. lipnja 2017.).

Boljega mentora od prof. dr. sc. Srećka Kovača nisam mogao poželjeti i zahvaljujem mu na povjerenju, strpljivosti i trudu. Svih godina kako ga znam nikada me nije prestao iznenađivati rijedak spoj logičke preciznosti, filozofijske dubine i moralnih vrlina koje oprimjeruje.

Zahvaljujem također kolegama Kristini i Ivanu na pomoći i hrabrenju dok sam pokušavao ovladati teorijom tipova. Uz prof. Kovača, Kristina je najzaslužnija ostavljam li ovim radom dojam pismenosti.

Hvala roditeljima što nisu odustali kada je izgledalo da bi trebali i sestri što se nije žalila koliko je imala pravo.

Možda najvažnije, znam koliko je molitava utrošeno u ovo. Hvala.

Sažetak

Ovaj doktorski rad sastoji se od dva glavna dijela. Prvi se dio bavi pitanjem što su stavačne funkcije u razgranatoj teoriji tipova Bertranda Russella, kako ju je izložio u filozofijskome uvodu prvoga izdanja *Principia Mathematica*. U tome se dijelu rada brani eliminativističko tumačenje i pokušava pokazati da Russell sam stavačne funkcije u *Principia* razumije samo kao izraze, kao tzv. nepotpune simbole, koji ne označavaju nikakve izvanjezične predmete poput pojmova ili atributa. Razgranata tipska hijerarhija, tvrdi se, rezultat je Russellova pokušaja da se paradoksi stavaka koje je otkrio u svojoj ranijoj supstitucijskoj teoriji izbjegnu tipskim razlikovanjem izrazā, dok je eliminacija stavaka i stavačnih funkcija iz pozadinske ontologije logičke teorije posljedica Russellova shvaćanja logike kao univerzalne znanosti, koja mora sadržavati samo jednu vrstu "istinskih" varijabla, tj. individualne ili entitetske varijable. Russellova teorija označavajućih fraza omogućila mu je izraze koji naizgled referiraju na entitete viših redova analizirati kao nepotpune simbole, bez značenja "u izolaciji". Na taj je način Russell mogao zadržati tipsku hijerarhiju potrebnu za izbjegavanje paradoksā i ujedno smatrati sačuvanim svoj nauk o neograničenoj varijabli. Na kraju prvoga dijela prepoznaju se određeni nedostatci Russellova eliminativističkoga pristupa i moguće prednosti razumijevanja razgranate hijerarhije kao ontologijske hijerarhije pojmova.

Drugi dio rada istražuje mogućnost primjene razgranate teorije tipova u formalizaciji realističke metafizike intenzionalnih entiteta i izgradnji filozofijski zadovoljavajuće formalne teorije pojma. U tome se dijelu rada opisuje na koji bi se način određene metafizičke intuicije o naravi intenzionalnih entiteta mogle formalno prikazati unutar prikladna sustava razgranate teorije tipova, a zatim opisuje sustav kumulativne intenzionalne razgranate teorije tipova (KIRTT). Rad završava analizom nekih metateorijskih svojstava toga sustava.

Ključne riječi: razgranata teorija tipova, stavak, stavačna funkcija, nepotpuni simbol, supstitucijska teorija, paradoks, intenzija, pojam, kumulativna intenzionalna razgranata teorija tipova.

Summary

This doctoral thesis consists of two main sections. The first section addresses the background ontology of Bertrand Russell's ramified type theory as described in *Principia Mathematica*. More precisely, it deals with the question of the ontological status of propositional functions. The concept of a propositional function is one of the central concepts of Russell's theory of types, both in the first draft of the theory in "Appendix B" of *The Principles of Mathematics* and in its mature formulation in the first edition of *Principia*. However, how to understand what Russell meant by "propositional functions" remains controversial. What *are* propositional functions? Are they some sort of intensional abstract entities, like properties and relations, or just expressions of the language of type theory, i.e. open formulas? An eliminativist interpretation is proposed and claimed that Russell's propositional functions are to be understood only as expressions, as the so-called "incomplete symbols", which do not denote any extra-linguistic objects, such as attributes, whether in realist or constructivist sense.

It is argued that the ramified type theory of *Principia* should not be understood as an abandonment of Russell's earlier substitutional theory, but rather as its continuation. The ramified type hierarchy is a consequence of Russell's belief that the paradoxes of propositions that plagued the substitutional theory can only be avoided by some kind of a type differentiation of propositions. On the other hand, the elimination of propositional functions (as well as propositions) from the ontology of *Principia* is a consequence of Russell's conception of logic as universal science, which must contain only one type of genuine variables – viz., completely unrestricted entity variables, with everything that exists as their values. The doctrine of the unrestricted variable has been formulated by Russell in *The Principles of Mathematics* and is an inseparable part of his understanding of logic. The theory of denoting phrases he developed in "On Denoting" provided the tool for the elimination of higher-order entities from the background ontology of his logic. This way, Russell managed to retain a complex type hierarchy of expressions needed to avoid the paradoxes and at the same time preserve the doctrine of the unrestricted variable.

At the end of the first section, certain advantages of rejecting the doctrine of the unrestricted variable and Russell's understanding of propositional functions as incomplete symbols are recognized, and suggested that the interpretation of the ramified hierarchy as an ontological hierarchy of concepts might be philosophically justified.

In the second section, a formal system of cumulative intensional ramified type theory (KIRTT) is presented, guided by a realist interpretation of a ramified type hierarchy and with semantics based on an intensional generalization of Henkin models. The aim was to formalize certain metaphysical intuitions concerning the nature of intensional entities and to sketch one possible formal theory of concepts.

Key words: ramified type theory, proposition, propositional function, incomplete symbol, substitutional theory, paradox, intension, concept, cumulative intensional ramified type theory.

Sadržaj

1 UVOD

Razgranata teorija tipova (RTT) logički je okvir logicističkoga programa svođenja matematike na logiku – tj. svođenja matematičkih predmeta na osnovne logičke entitete i matematičkih poučaka na opće logičke aksiome – koji su B. Russell i A. N. Whitehead pokušavali provesti u *Principia Mathematica* [122]. Razvoj teorije tipova bio je motiviran otkrićem antinomija u logici i teoriji skupova početkom 20. stoljeća, od kojih je najpoznatija upravo ona koju danas nazivamo 'Russellov paradoks'. Osnovna je ideja Russellove teorije tipova sljedeća: (i) da bi se izbjegli paradoksi, vrijednosti varijabla stavačnih funkcija moraju biti ograničene na određeno "područje značenja", unutar kojega stavačna funkcija uopće ima vrijednost (tj. stavak); (ii) područja značenja uzajamno su isključiva, tj. ako su ϕa i ψa stavci, onda za svaki x vrijedi da ako je ϕx stavak, onda je i ψx stavak. To područje značenja stavačnih funkcija ono je što Russell naziva tipom.

U ranoj Russellovoj teoriji tipova, predloženoj u dodatku knjige *The Principles of Mathematics* [96], koja otprilike odgovara tzv. jednostavnoj teoriji tipova, razred svih pojedinačnosti tvori tip, razred svih razreda pojedinačnosti (ili, intenzionalno čitano, razred svih svojstava pojedinačnosti) tvori tip, razred svih razreda razreda pojedinačnosti (tj. svojstava svojstava pojedinačnosti) tvori tip, itd. Međutim, u razgranatoj teoriji tipova iz *Principia*, tip kojemu funkcija pripada ovisi također o njezinu redu, odnosno o tome koje vezane varijable funkcijski izraz sadrži. Drugim riječima, tip stavačne funkcije ne ovisi samo o mogućim argumentima funkcije, već također i o tome pokoličavanje nad kojim tipovima funkcija "uključuje", kao i o broju količitelja u funkcijskome izrazu. U opravdanju za tako složenu tipsku hijerarhiju Russell se poziva na tzv. načelo poročnoga kruga, prema kojemu, u jednoj formulaciji, ništa što "uključuje" sve članove neke sveukupnosti ili što "pretpostavlja" tu sveukupnost ne može i samo biti jedan od članova te iste sveukupnosti. No, razgranata teorija tipova nije dovoljna za rekonstrukciju većega dijela matematike ako se u sustavu također ne pretpostavi sporna aksiomatska shema svedljivosti. Iako *Principia* ne uspijevaju u potpunome svođenju matematike na logiku, može se argumentirati da pokazuje na koji se način ekstenzionalna matematička teorija skupova može izvesti iz širega okvira intenzionalne logike stavačnih funkcija i koje su dodatne, ne-logičke pretpostavke (poput aksioma beskonačnosti i aksiomatske sheme svedljivosti) pritom potrebne.

Nakon Ramseyjeve kritike [83] teorije tipova u *Principia*, uobičajeno je stajalište da je Russell razgranatom teorijom pokušavao ponuditi jedinstveno rješenje za paradokse koji pripadaju fundamentalno različitim kategorijama – logičko-matematičke s jedne i semantičke paradokse s druge strane – što je rezultiralo nepotrebno složenom tipskom hijerarhijom i nužnošću uvođenja aksiomatske sheme svedljivosti za izvođenje matematike unutar razgranate teorije. Tipično se danas smatra da bi teorija tipova morala moći odgovoriti samo na logičko-matematičke paradokse, za što je dovoljna jednostavna hijerarhija poput one predložene u *Principles*. To je stajalište dovelo do zanemarivanja razgranate teorije tipova i davanja prednosti jednostavnoj teoriji tipova, prije svega nakon njezina spajanja s λ-računom u Churchovoj formulaciji jednostavne teorije u [12].

Russellova razgranata teorija tipova u svojim je osnovnim crtama logičarima široko poznata, uključujući probleme povezane s načelom poročnoga kruga i aksiomatskom shemom svedljivosti.[2] Široko je poznat i sam formalni aspekt razgranate teorije i tijekom desetljećā razvijeno je nekoliko formalizacija teorije. Klasične formalizacije razgranate teorije tipova uključuju npr. Quineovu [82], Chiharinu [11] i, posebice, Churchovu [14]. Church u svojoj formalizaciji razgranate teorije slabi Russellova tipska ograničenja i dopušta određenu razinu kumulativnosti: područja vrijednosti tipskih varijabla uključena su u područja vrijednosti varijabla više "razine". Za tako formaliziranu razgranatu teoriju pokazuje da uspješno izbjegava semantičke paradokse i njezino rješenje semantičkih paradoksa uspoređuje s Tarskijevom semantičkom teorijom istine ([115], [116], [118]). Churchova je formalizacija razgranate teorije tipova do danas ostala najpoznatija i najčešće rabljena. Mares [66], na primjer, koristi njegovu formalizaciju u svojoj izgradnji tzv. činjenične semantike za razgranatu teoriju, a definicija r-tipa i korisno razlikovanje između reda i razine rabit će se i u ovom radu za opis razgranate tipske hijerarhije stavačnih funkcija u *Principia*. Churchova razgranata teorija i sama je s vremenom postala predmet teorijskoga zanimanja. Peressini [72] tako uspoređuje odgovor na semantičke paradokse u kumulativnoj (u Churchovu smislu) i nekumulativnoj teoriji, a Anderson u [1] i [2] pokazuje da je u Churchovu sustavu izvedljiv tzv. paradoks jedinične domene. U novije vrijeme, pokušavajući ostati što vjerniji Russellovim idejama i njegovoj neformalnoj semantici, razgranatu teoriju formaliziraju Laan [55] i Laan i Nederpelt [56], a njihovu formalizaciju razgranate teorije s Kripkeovom teorijom istinitosti, iznesenu u [54], uspoređuju Kamareddine i Laan [45] i Kamareddine, Laan i Constable [46].

Međutim, pitanja koja se tiču implicitne Russellove semantike i ontologije, kao i Russel-

[2] Kao povijesna zanimljivost, Fran Mihletić već 1912. u "Principi matematike" [67], objavljenom u *Nastavnom vjesniku*, piše o *Principia*.

love filozofijske motivacije za usvajanje razgranate teorije tipova, ostala su otvorena. To se prije svega odnosi na pitanje što točno Russell uopće ima na umu kada govori o stavačnim funkcijama? Pojam stavačne funkcije središnji je pojam Russellove teorije tipova još od prvoga nacrta u *The Principles of Mathematics*, ali do danas je ostalo sporno koji je njihov ontologijski status. Štoviše, nejasno je je li sam Russell uopće imao koherentno i dosljedno shvaćanje stavačnih funkcija u vrijeme pisanja *Principia*. U slavnoj napomeni, Geach je još sedamdesetih rekao da je Russellova uporaba izraza 'stavačna funkcija' "beznadno zbrkana i nesuvisla" [31, str. 272], a Cartwright, tridesetak godina kasnije, da "pokušaji kazati što točno russellovska stavačna funkcija jest, ili što bi trebala biti, obvezno završavaju u frustraciji." [10, str. 915]

Glavna suprotstavljena tumačenja ontologijskoga statusa stavačnih funkcija u Russellovu razumijevanju logike možemo grubo podijeliti na sljedeći način:

(1) Realističko tumačenje: RTT je rezultat Russellova realističkoga stava prema stavačnim funkcijama kao bitno intenzionalnim entitetima.

(2) Konstruktivističko tumačenje: RTT je rezultat općega Russellova konstruktivističkoga stajališta prema predmetima logike i matematike.

(3) Eliminativističko tumačenje: RTT je rezultat Russellova pokušaja izgradnje logike i matematike bez pretpostavljanja opstojnosti apstraktnih izvanjezičnih entiteta poput razredā i atributā.

Realističko tumačenje brane npr. Goldfarb u [34] i Linsky u [63], [64] i [65], tvrdeći da Russellovu logiku valja shvatiti kao univerzalnu intenzionalnu logiku koja sadrži sredstva za logički opis intenzionalnih fenomena, iako je uski cilj *Principia* pokazati kako se na temelju te logike može izgraditi ekstenzionalna logika razredā. Razgranatost je, prema tome tumačenju, posljedica Russellova realističkoga shvaćanja stavačnih funkcija kao izvanjezičnih intenzionalnih entiteta.

Konstruktivističko tumačenje prvi je iznio Gödel [32], kritizirajući Russellovu logiku s realističke (platonističke) pozicije. Konstruktivističko tumačenje kasnije djelomično preuzima i Quine [82], dodajući također da je razgranata tipska hijerarhija posljedica Russellova pokušaja pronalaska jedinstvenoga rješenja za paradokse koji pripadaju fundamentalno različitim kategorijama, od kojih je samo jedna relevantna za logiku i matematiku, kao i Russellova nerazlikovanja stavačnih funkcija kao svojstava i relacija od stavačnih funkcija kao jezičnih izraza.

S druge strane, Landini, npr. u [59] i [61], povezuje razgranatu teoriju tipova s ranijim Russellovim pokušajem rješenja logičkih paradoksa unutar tzv. supstitucijske teorije, u kojoj Russell stavačne funkcije izričito smatra tek nepotpunim simbolima, koji sami po sebi ne označavaju ništa. Teorija tipova u *Principia*, tvrdi Landini, jedan je u nizu pokušaja rješavanja paradoksā unutar širega Russellova programa ontologijske redukcije. Eliminativističko tumačenje iznosi i Klement [48]. Prema njemu, Russell je kao izvor paradoksā vidio upravo pretpostavku da opstoje izvanjezični apstraktni logički i matematički predmeti poput stavačnih funkcija i razreda i stoga je razgranata teorija tipova rezultat pokušaja nominalističke izgradnje logike i matematike, bez pretpostavljanja opstojnosti takovih entiteta.

Prvi dio ovoga rada, "Stavačne funkcije u Russellovoj razgranatoj teoriji tipova", bavi se pitanjem što su stavačne funkcije u *Principia Mathematica*. U njem se brani eliminativističko tumačenje i pokušava pokazati da Russell sam stavačne funkcije u *Principia* razumije *samo* kao izraze, kao nepotpune simbole, koji ne označavaju nikakve izvanjezične predmete poput pojmova ili atributa, bilo realistički bilo konstruktivistički shvaćenih. Tvrdi se, uglavnom prihvaćajući Landinijeve argumente, da razgranatu teoriju tipova treba razumjeti ne kao nagli raskid s ranijom supstitucijskom teorijom već kao njezin nastavak. Razgranata tipska hijerarhija rezultat je Russellova uvjerenja da se paradoksi stavaka koje je otkrio u supstitucijskoj teoriji mogu izbjeći samo tipskim razlikovanjem stavaka, a eliminacija stavačnih funkcija (i stavaka) iz ontologije *Principia* posljedica je Russellove koncepcije logike kao univerzalne znanosti, koja mora sadržavati samo jednu vrstu "istinskih" varijabla, moguće vrijednosti kojih su sve što uopće postoji. Tzv. nauk o neograničenoj varijabli formulirao je Russell još u *The Principles of Mathematics* i neodvojiv je dio njegova razumijevanja logike. Teorija označavajućih fraza iz "On Denoting" [86] omogućila mu je izraze koji naigled referiraju na entitete koji, po cijenu protuslovlja, ne mogu biti vrijednosti tih istinskih, tj. individualnih ili entitetskih, varijabla proglasiti jednostavno nepotpunim simbolima, koji zapravo ne referiraju ni na što. Na taj je način Russell mogao zadržati složenu tipsku hijerarhiju potrebnu za izbjegavanje paradoksā i ujedno sačuvati nauk o neograničenoj varijabli.

Argument, naravno, nije konkluzivan i dopušta se da je Russella moguće i drugačije čitati. Također, tvrdnjom da Russell sam razumije razgranatu tipsku hijerarhiju stavačnih funkcija tek kao hijerarhiju izrazā ne tvrdi se ujedno da je to *najbolji* način za razumjeti hijerarhiju stavačnih funkcija. U zadnjemu potpoglavlju prvoga poglavlja prepoznaju se određeni nedostatci eliminativističkoga tumačenja i moguće prednosti interpretacije razgranate hijerarhije kao ontologijske hijerarhije pojmova.

Filozofijska pitanja kojima se prvi dio rada bavi uglavnom su neovisna o pitanjima vezanima uz pojedina tehnička rješenja formalizacije razgranate teorije. Taj dio rada stoga sadrži relativno malo formalizma i uvodi ga se samo ondje gdje se to čini presudnim i gdje znatno pomaže postići jasnoću u izlaganju i argumentaciji.

Drugi dio rada, "Kumulativna intenzionalna razgranata teorija tipova", istražuje mogućnost realistički interpretirane razgranate teorije tipova u formalizaciji "platonističke" metafizike intenzionalnih entiteta i izgradnji filozofijski zadovoljavajuće formalne teorije pojma. U tom se dijelu rada najprije opisuje na koji bi se način određene metafizičke intuicije o naravi intenzionalnih entiteta mogle formalno reprezentirati unutar prikladna sustava razgranate teorije tipova, a zatim se izlažu jezik i semantika sustava koji se naziva 'KIRTT'.

KIRTT je eksplicitno intenzionalna teorija i za semantiku se rabi intenzionalno poopćenje tzv. općih ili Henkinovih [42] modela, koji omogućuju formalno simulirati bitno neekstenzionalne značajke takvih entiteta kao što su pojmovi ili svojstva. Tumačenje, vrjednovanje varijabla i apstraktno označavanje oznakama pridružuju proizvoljne predmete (ne nužno skupove), a funkcija ekstenzije predmetima pridružuje neki skup predmeta kao njihov opseg. Posljedica je da u sustavu nije slučaj da koekstenzivnost predmeta povlači njihovu istovjetnost.

Način tipizacije koji se rabi čini KIRTT razgranatom teorijom tipova, što onemogućava tzv. nepriručne definicije. To neformalno jamči suvislost teorije, ali ujedno ju čini vrlo slabim sustavom. Razlog za strogu priručnost leži u intendiranoj neformalnoj semantici prema kojoj su priročni apstrakti imena *pojmova*, i u pozadinskoj metafizici, prema kojoj je bitno obilježje pojma njegov "smisao" ili "intenzionalni sadržaj". Sadržaj pojma, u metafizičkoj slici modeliranoj u sustavu KIRTT, može se razumjeti kao ontologijski ovisan o sadržaju pojmova koji tvore dani pojam, što prevedeno u određeni sustav tipizacije oznaka jezika, vodi nečemu vrlo sličnomu Russellovu načelu poročnoga kruga i strogoj priričnosti sustava. Naspram Gödelu [32], razumije se ramifikaciju ne kao posljedicu konstruktivizma ili nominalizma već objektivne intenzionalnosti pojmova.

Konačno, KIRTT je kumulativan sustav: (i) tvorbena pravila dopuštaju atomarne formule oblika $\tau^t(\upsilon^u)$ i u slučaju kada je $u < t - 1$; (ii) supstitucijska pravila dopuštaju supstituciju varijable tipa t oznakom tipa $\leq t$; (iii) funkcija ekstenzije predmetu tipa t pridružuje kao ekstenziju skup čiji članovi mogu biti tipa $\leq t - 1$; (iv) vrjednovanje varijabla varijabli tipa t može pridružiti predmet bilo kojega tipa $\leq t$.

Nakon opisa semantike, daju se pravila za metodu istinitosnoga stabla za KIRTT i dokazuje da je metoda stabla pouzdana za kumulativne poopćene Henkinove modele. Nažalost, pokazuje se da je lako dokazati nepotpunost.

2 STAVAČNE FUNKCIJE U RUSSELLOVOJ RAZGRANATOJ TEORIJI TIPOVA

2.1 Russellov paradoks

U svojoj filozofijskoj autobiografiji *My Philosophical Development* [98, str. 65], Bertrand Russell opisuje kako je u ljeto 1900. u Parizu, na prvome "Međunarodnomu filozofijskome skupu", postao svjestan važnosti logičke reforme za filozofiju matematike. Kao presudan utjecaj navodi Peana, koji je "u svakoj raspravi, pokazao više preciznosti i logičke strogosti nego što je pokazao bilo tko drugi". Russell je zamolio Peana za primjerke njegovih radova i, kako kaže, "smjesta ih sve pročitao". Bio je kraj srpnja kada je upoznao Peana, a do kraja iste godine završio je s pisanjem prve radne inačice knjige *The Principles of Mathematics* [96].[3] To je razdoblje kasnije opisao [98, str. 73] kao "intelektualni medeni mjesec kakav niti prije niti poslije nije nikada iskusio".

Peano je u svojoj aksiomatizaciji aritmetike pomoću nove simboličke notacije u *Arithmetices principia* [71], maloj knjižici na latinskome u kojoj se prvi put pojavljuju njegovi slavni aksiomi, simbole razlikovao kao "znakove koji pripadaju ili logici ili aritmetici u pravome smislu" [69, str. 85]. Posebno, izrazi za brojeve pripadaju aritmetičkim, a ne logičkim simbolima. Russell, s druge strane, u *Principles* predlaže definiciju kojom se brojevi svode na određenu vrstu skupova. Preciznije, definira pozitivne cijele brojeve kao skupove sličnih skupova: 0 je skup svih skupova bez ijednoga člana (tj. skup koji kao svoj jedini element sadrži prazan skup), 1 je skup svih skupova sličnih skupu 0 (tj. skup svih skupova sa samo jednim članom), 2 je pak skup svih skupova koji su slični skupu koji sadrži samo 0 i 1 (dakle, skup svih skupova koji sadrže upravo dva člana) itd. Za tu se definiciju uobičajilo ime 'Frege-Russellova definicija brojeva'.[4]

[3]Grattan-Guinness [37, str. 57] Russellovu priču opisuje kao "apsurdno pogrješnu" te tvrdi da Russell većinu Peanovih radova nije zaprimio još mjesec dana od zahtjeva, a da se iz sačuvanih rukopisa vidi da je pisanje *Principles* trajalo do u 1902. godinu. Posebno, ključni dijelovi s logikom relacija i definicijama cijelih brojeva napisani su tek 1901.

[4]Fregeu tu pripada prednost. Definicija slična Russellovoj nalazi se u *Grundgesetze der Arithmetik* iz 1893. [26], ali Frege istu predlaže još 1884. u *Die Grundlagen der Arithmetik* [25], dakle barem šesnaest godina prije nego Russell dolazi do iste ideje. Russell, kao ni Peano, 1900. još ne poznaje Fregeov rad, ali dolazi do njega za vrijeme pisanja *Principles* i posvećuje mu prvi dodatak knjige, naslovljen "The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege". Za Fregeovo djelo ondje kaže [96, str. 501] da "obiluje finim distinkcijama i izbjegava sve uobičajene pogrješke", a za njegov simbolizam da je, iako nezgrapan za praktičnu primjenu, "zasnovan na analizi logičkih pojmova koja je mnogo dublja od Peanove" i da je ktomu "filozofijski jako nadmoćan" Peanovu. *Die Grundlagen*

Redni su brojevi definirani na sličan način, kao skupovi sličnih dobro uređenih skupova. Unatoč odstupanju od Peana, te su definicije Russellu postale dostupne upravo zahvaljujući njemu: razlikovanje jediničnoga skupa od njegova jedinoga elementa, o kojemu predložene definicije brojeva ovise, jedno je od najvažnijih tehničkih rezultata koje je Russell naučio od Peana [98, str. 66].

Međutim, smatra Russell, s definicijom brojeva u terminima skupova, nestalo je potrebe razlikovati logičke od aritmetičkih simbola (ili logičke od aritmetičkih pojmova), kako to čini Peano. Pojam skupa – ili, da budemo bliži Russellovu nazivlju, pojam razreda (*class*) – pojam je koji pripada (također i) logici. Naime, Russell o razredima, u skladu Booleovom logičkom tradicijom i pod utjecajem Whiteheada [121], razmišlja prije svega kao o opsezima pojmova.[5] No to tada znači da se *svi* aritmetički pojmovi mogu definirati u terminima čisto logičkih pojmova. Svođenje aritmetičkoga pojma broja na pojam razreda tako postaje osnova Russellova pogleda na matematiku, prema kojemu se cjelokupna "čista" matematika svodi zapravo na logiku. Malo preciznije govoreći, svi se pojmovi matematike mogu svesti na pojmove logike, a sve matematičke tvrdnje na logičke istine: cjelokupna se matematika može izvesti iz općih logičkih aksioma. U predgovoru *The Principles of Mathematics* kaže Russell da je jedan od glavnih ciljeva knjige ponuditi "dokaz da se sva čista matematika bavi isključivo pojmovima definirljivima pomoću vrlo maloga broja temeljnih logičkih pojmova, a da su svi njezini stavci (*propositions*) izvedljivi iz vrlo maloga broja temeljnih logičkih načela" [96, str. xv]. Slično, na samome početku knjige, u prvome paragrafu prvoga poglavlja, naslovljenoga "Definition of Pure Mathematics", Russell piše:

> Čista je matematika razred svih stavaka oblika "p povlači q", gdje su p i q stavci koji sadrže jednu ili više varijabla, istih u oba stavka, a niti p niti q ne sadrže nijednu konstantu osim logičkih konstanti. A sve su logičke konstante pojmovi definirljivi u terminima sljedećih: pogodbe (*implication*), relacije oznake (*term*) prema razredu kojega je član, pojma *takav da*, pojma relacije, i takvih daljnjih pojmova koji mogu

der Arithmetik i nekoliko manjih Fregeovih spisa, u prijevodu Filipa Grgića i Maje Hudoletnjak Grgić, objavljeni su na hrvatskom jeziku kao *Osnove aritmetike i drugi spisi* [28]. Knjiga *Frege: pojmovno pismo* [112] Gorana Švoba do danas je najopsežniji rad o Fregeovu pojmopisu objavljen na hrvatskome.

[5] Vidi npr. Klement [48, str. 635]. Za razliku od Peana koji pojmove razreda i članstva uzima kao temeljne ili primitivne pojmove, Russell u *Principles* u svojoj teoriji razredā polazi od tri nedefinirljiva pojma (*indefinables*): relacije članstva ili pripadnosti, stavačne funkcije – tj. pojma koji *otprilike* odgovara pojmu pojma – i pojma "takav da" (*such that*). Iako kaže [96, str. 18-19] da je Peanov pristup možda filozofijski ispravniji, svoj pristup smatra pogodnijim za formalne svrhe.

> biti uključeni u pojam stavaka gore spomenuta oblika. Dodatno, matematika *rabi* pojam koji nije sastavnica (*constituent*) stavaka na koje se odnosi, naime pojam istine. [96, str. 3]

Za takvo razumijevanje matematike kasnije se u filozofiji matematike uobičajio naziv 'logicizam', a Russell je, uz Fregea, ostao povijesno najznačajniji njegov predstavnik.[6] Iako će kasnije sam odbaciti gore citiranu definiciju čiste matematike i znatno promijeniti svoje početne metafizičke poglede o naravi predmetā logike i matematike, to osnovno razumijevanje odnosa logike i matematike Russell nikada nije napustio.[7]

Nažalost, kako se pokazalo, Russellov intelektualni medeni mjesec nije dugo potrajao i uskoro ga je zamijenila "intelektualna tuga" [98, str. 73]. Razmatrajući Cantorov dokaz o nepostojanju najvećega kardinalnoga broja, Russell negdje u svibnju ili početkom lipnja 1901. otkriva protuslovlje koje danas znamo pod imenom 'Russellov paradoks'.[8] Ne shvaćajući isprva važnost paradoksa i misleći da se radi možda tek o "trivijalnoj pogrješci" u njegovu rasuđivanju [98, str. 76], Russell godinu dana kasnije – u kratkome pismu od 16. lipnja 1902., koje će tijekom narednoga stoljeća postati vjerojatno najcitiranije pismo u povijesti filozofije –

[6]Definicija logicizma prema kojoj bi logicizam bilo stajalište da se *sva* matematika može svesti na logiku ipak bi bila prestroga. Logicizam je, općenito, filozofijski pogled na matematiku prema kojemu su bilo sva matematika bilo samo određene discipline ili područja koja se tradicionalno smatraju granama matematike svedljivi na logiku. (Vidi npr. Godwyn i Irvine [33, str. 171].) Russellov je logicizam radikalniji od Fregeova utoliko što Frege *nije* smatrao da se geometrija, za razliku od aritmetike, svodi na logiku. Russell jest, već stoga što je, za razliku od Fregea, prihvaćao aritmetizaciju geometrije. Sažet ali informativan prikaz razlike između Russellove i Fregeove koncepcije logicizma može se naći u Landini [59, str. 13-16]. Sam izraz 'logicizam' nije niti Russellov niti Fregeov, već je kasnijega podrijetla i dugujemo ga Carnapu [7]. Carnap je također zaslužan za razlikovanje u "Die logizistische Grundlegung der Mathematik" [8] između tvrdnje o definirljivosti matematičkih iz logičkih pojmova i tvrdnje o izvodljivosti matematičkih poučaka iz logičkih aksioma. Taj se Carnapov tekst, u hrvatskome prijevodu Deana Rosenzweiga [9], može naći u zborniku *Novija filozofija matematike* [110]. Zvonimir Šikić u "Novija filozofija matematike" [109], uvodnome tekstu zbornika, daje sustavan prijegled glavnih pitanja i pozicija u filozofiji matematike. Berislav Žarnić [124] piše o implicitnim pretpostavkama logicističkih teorija kardinalnih brojeva kroz analizu pozadinske reprezentacijske teorije jezika.

[7]Dobar dio "Uvoda" drugoga izdanja *Principles* iz 1938. posvetio je Russell kritičkoj analizi svoje definicije čiste matematike s početka prvoga izdanja, ali ujedno naglašava da nikada nije vidio nikakva razloga izmijeniti "temeljnu tezu [knjige], da su matematika i logika istovjetne" [96, str. v]. Koliko su se s vremenom Russellovi metafizički pogledi na logiku promijenili govori to što u vrijeme pisanja *My Philosophical Development*, izdanoj 1959., zakone logike smatra tek jezičnim konvencijama: "Više ne mislim da su zakoni logike zakoni stvari; naprotiv, sada ih smatram čisto jezičnima." [98, str. 102]

[8]Griffin [38] detaljno opisuje povijest i kontekst otkrića Russellova paradoksa, a Klement [49] analizira odnos između Cantorova poučka o partitivnome skupu i različitih paradoksā koje je Russell bilo sam otkrio bilo samo razmatrao u svojim djelima, uključujući paradoks skupova koji nisu svoji članovi i paradoks priroka koji ne oprimjeruju sami sebe. Sam Russell u *Principles* otkriveni paradoks dosljedno naziva jednostavno 'protuslovlje' (*the contradiction*). Među hrvatskim autorima, precizniju skupovno-teorijsku analizu Russellova paradoksa i njegova odnosa spram Cantorova poučka može se naći u Šikić [108]. Isti autor u [111] nešto opširnije opisuje Cantorov dijagonalni argument i njegov utjecaj. Na hrvatskome jeziku, Švob daje zanimljivu analizu paradoksā u antologijskome članku "Ima li danas logičkih antinomija?" u [113]. Vladimir Devidé [19, str. 190-192] također ukratko opisuje Russellov paradoks i njegovu ulogu u povijesti matematike.

o otkrivenome paradoksu obavještava Fregea:

> Neka je w prirok: biti prirok koji se ne može priricati sam sebi. Može li se w priricati sam sebi? Iz bilo kojeg odgovora, suprotno slijedi. Stoga moramo zaključiti da w nije prirok. Slično tomu, ne postoji razred (kao sveukupnost) onih razreda koji, svaki uzet kao sveukupnost, ne pripadaju sami sebi. Iz toga zaključujem da pod određenim okolnostima definirljiva kolekcija [Menge] ne tvori sveukupnost. [40, str. 125][9]

Izrazi koje Russell u pismu rabi lako mogu zbuniti današnjega čitatelja. Kada govori o razredu kao sveukupnosti, Russell ima na umu kolekciju ili množinu entitetā, takvu da se ona sama može razumjeti kao *cjelina*, kao *jedna* stvar ili kao zaseban *entitet*. Odražava to, čini se, uobičajeni onovremeni način konceptualizacije problema tzv. paradoksalnih razreda. Na sličan način Cantor, na primjer, razlikuje dvije vrste mnoštvenosti (*Vielheiten*): suvisle, koje se mogu shvatiti kao neko *jedno*, kao jedna stvar (*Einheit*), i nesuvisle, koje se tako shvatiti ne mogu, npr. skup svih skupova, skup svih rednih brojeva i sl. Iako filozofijski gotovo zaboravljeno, to je razlikovanje očito blisko razlici između skupova (koji i sami mogu biti elementi) i pravih razreda (koji to ne mogu biti) u teoriji skupova NBG.[10]

Russellovo pismo Fregeu sadrži dvije inačice paradoksa, priročnu i skupovnu – ili, mogli bismo također reći, intenzionalnu i ekstenzionalnu – no njihova je struktura ista. U oba se slučaja kreće od neke naizgled nesporne i očigledno istinite pretpostavke o skupovima, odnosno prirocima, a zatim se pokazuje se da se iz nje, posve nespornim načinom zaključivanja, može izvesti protuslovlje.

"Očigledno istinita" pretpostavka naivne teorije skupova to je da za svako svojstvo ili, neutralno govoreći, uvjet ϕ, iskazan npr. formulom s jednom slobodnom varijablom, postoji neki skup koji kao svoje članove sadrži upravo one predmete koji posjeduju to svojstvo, tj. koji taj uvjet zadovoljavaju. Recimo, ako je ϕ "x je prirodni broj", onda postoji skup koji kao članove sadrži sve prirodne brojeve i ništa što nije prirodni broj nije njegov član; ako je ϕ svojstvo "biti ljudsko biće", postoji skup koji sadrži sva i samo ljudska bića. Ta će se pretpostavka kasnije na-

[9]Pismo je pisano na njemačkome jeziku, no prijevod je prema engleskome prijevodu u Heijenoort [40]. U kratkoj napomeni prije prijevoda pisma stoji da je Russell pregledao prijevod i odobrio ga.

[10]Vidi Cantorovo pismo Dedekindu u Heijenoort [40, str. 113-117]. Cantini [6, str. 880] (u podrubnici 5) navodi da se slično razlikovanje može naći još ranije u Schröder [103].

zvati načelom sadržaja (komprehenzije) ili načelom apstrakcije (ili, u kontekstu aksiomatizacije teorije skupova, aksiomatskom shemom sadržaja).

U piročnoj inačici paradoksa također imamo, naizgled očito istinito, načelo sadržaja za priroke. Jednu stvar ovdje treba prethodno spomenuti. Kada Russell, barem u vrijeme pisanja *Principles*, govori o prirocima, nema na umu ono što bismo danas obično razumjeli pod tim izrazom. To jest, ne misli na prirok kao na određeni *jezični* izraz, već otprilike na ono što bismo nazvali 'atribut', 'svojstvo' ili 'pojam' – ili, tradicionalnijim rječnikom, 'univerzalija'. Više ćemo o tome kazati u narednome potpoglavlju pa je za sada ta napomena dovoljna. Prema odgovarajućemu načelu sadržaja, za svaki *jezični* predikat ili uvjet ϕ, izražen npr. formulom s jednom slobodnom varijablom, postoji odgovarajuće svojstvo koje se pririče (ili, kažemo još, koje je oprimjereno) upravo onim predmetima koji taj uvjet zadovoljavaju. Ako je ϕ, na primjer, "x je ljudsko biće", prema načelu sadržaja za priroke, postoji atribut "ljudskost" ili svojstvo "biti ljudsko biće", koje pripada svim i samo onim predmetima koji zadovoljavaju ϕ.

Načelo sadržaja (bilo za skupove bilo za priroke) formalno možemo prikazati na sljedeći način:

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \phi)$$

Dakle, neformalno čitano, postoji skup x kojega su članovi upravo oni predmeti y koji zadovoljavaju uvjet ϕ. Odnosno, u piročnoj inačici, prilagodimo li neformalno tumačenje znaka '$\in$', postoji prirok x koji se odnosi upravo na one predmete y koji zadovoljavaju uvjet ϕ. No uzmimo sada da je naš uvjet ϕ "biti skup koji ne pripada sam sebi" (tj. "x nije element od x") ili "biti prirok koji se ne pririče sam sebi" (tj. "x ne oprimjeruje x"). Iz načela sadržaja slijedi tada sljedeći iskaz:

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y)$$

Taj iskaz kaže da postoji skup x čiji su članovi upravo oni predmeti koji nisu sami svoji članovi. Odnosno, da postoji prirok x koji je oprimjeren upravo onim predmetima koji nisu oprimjereni samima sobom. Nazovemo li taj skup ili prirok 'S', imamo:

$$\forall y (y \in S \leftrightarrow y \notin y)$$

Sada vidimo problem. Prema gornjemu iskazu, za *svaki* predmet y vrijedi da je član skupa S ako i samo ako taj predmet y nije sam svoj član. Vrijedi to za svaki predmet pa tako onda i za sam skup S. U priročnome čitanju, gornji nam iskaz kaže da za svaki predmet y vrijedi da oprimjeruje prirok S ako i samo ako taj predmet y ne oprimjeruje sam sebe. Kako to vrijedi za svaki y, vrijedi i za prirok S. Stoga slijedi:

$$S \in S \leftrightarrow S \notin S$$

Skup svih skupova koji sami sebe ne sadrže ujedno i jest i nije svoj član. Prirok koji se odnosi na sve priroke koji se ne pririču sami sebi ujedno se i pririče i ne pririče sebi. Iz toga, naravno, slijedi $S \in S \wedge S \notin S$, a *ex contradictione quodlibet*. Paradoks očito pokazuje da nešto nije u redu s naivnim načelom sadržaja – drugim riječima, da nešto nije u redu s našim "intuitivnim" ili "predteorijskim" razumijevanjem razredā i prirokā. *Što* točno nije u redu, puno je teže za vidjeti.

Za razliku od Russella samoga, Frege je odmah uočio važnost njegova paradoksa. U odgovoru Russellu piše da ga je njegovo otkriće iznenadilo i zapanjilo i uzdrmalo temelje na kojima se nadao izgraditi aritmetiku – štoviše, da se boji da paradoks prijeti ne samo njegovu već bilo kojemu mogućemu utemeljenju aritmetike. No, koliko god se otkriće na prvi pogled čini neželjenim, kaže, možda će iz njega proizaći važan napredak u logici.[11] U vrijeme kada prima Russellovo pismo, drugi svezak njegova glavna djela *Grundgesetze der Arithmetik* nalazi se u tisku i Frege u knjigu uspijeva samo priložiti dodatak u kojem opisuje paradoks i iznosi – kako će se pokazati, neuspješan – prijedlog kako paradoks izbjeći.[12] Od planiranoga trećega sveska Frege je odustao, a kasniji njegovi radovi pokazuju da ga je Russellovo otkriće uvjerilo da je logicizam neistinit.[13]

O paradoksu – ili "protuslovlju", kako ga jednostavno naziva – Russell opširno piše u *The Principles of Mathematics*. No, Russellov paradoks nije prvi paradoks skupova koji se pojavio. Burali-Forti je paradoks najvećega rednoga broja objavio još 1897., no nije privikao veću pažnju.[14] Cantor, doduše, paradoks najvećega kardinalnoga broja, koji danas nosi njegovo ime, nije

[11] Vidi u Heijenoort [40, str. 127-128]. Frege upozorava da se, tehnički, paradoks u obliku u kojemu ga je opisao Russell ne može formulirati u njegovu sustavu – za Fregea, prirok se ne može priricati prirocima, tj. funkcija ne može kao svoj argument imati funkciju – ali da ga nije problem prikladno preinačiti.

[12] U dodatku Frege piše: "Znanstvenom piscu jedva se može dogoditi nešto nepoželjnije negoli da mu se nakon dovršetka jednog rada uzdrma jedna od osnova njegove građevine. Ja sam stavljen u taj položaj pismom gospodina Bertranda Russella kad se tiskanje ovog sveska približavalo kraju..." (Prijevod je iz Devidé [19, str. 190].) Poznata analiza Fregeova prijedloga Quineov je "On Frege's Way Out" [81], no Quine napominje, pozivajući se na Sobocińskog [105], da je Leśniewski još 1938. pokazao da je Fregeov prijedlog nesuvisao.

[13] Vidi Godwyn i Irvine [33, str. 182].

[14] Prijevod Burali-Fortijeva članka na engleski, "A Question on Transfinite Numbers", nalazi se u Heijenoort [40,

objavio, ali komunicirao ga je u pismima Dedekindu 1899., a čini se da zna za antinomiju već 1895., možda čak i tako rano kao 1883.[15] Štoviše, paradoks skupa skupova koji nisu svoji članovi – dakle, paradoks koji znamo kao 'Russellov'! – od 1902., neovisno o Russellu i Fregeu, poznat je Hilbertu, Zermelu i Husserlu.[16] Međutim, do Russella i Fregea paradoksi nisu prepoznati kao ozbiljan problem, bilo za logiku bilo za teoriju skupova. Razlozi su različiti: Cantor je u paradoksima vidio otkriće da postoje nesuvisle mnoštvenosti, koje je smatrao pozitivnim doprinosom svojoj teoriji; Hilbert i krug matematičara oko njega paradokse skupova vide tek kao prirodnu i očekivanu pojavu u rastućoj mladoj disciplini, kakva je u to vrijeme teorija skupova.[17] Tek Frege, a potom i Russell, u paradoksima vide dubok problem, koji nije vezan tek uz pojedinu matematičku disciplinu, već logiku i mišljenje općenito. Kako je Russell kasnije napisao [98, str. 75], paradoks je pokazao da "iz premisa koje su svi logičari, bilo koje škole, prihvaćali još od vremena Aristotela, mogu se izvesti protuslovlja." Prema Gödelu, važnost je Russellova rada na paradoksima to što je pokazao da su naše logičke intuicije protuslovne:

> Analizirajući paradokse do kojih je dovela Cantorova teorija skupova, oslobodio ih je svih tehničkih matematičkih detalja, izvevši tako na vidjelo zapanjujuću činjenicu da su naše logičke intuicije (tj. intuicije u pogledu takvih pojmova kao: istina, pojam (*concept*), biće (*being*), razred, itd.) protuslovne. [32, str. 124]

U nekoliko godina nakon objavljivanja *The Principles of Mathematics* pojavit će se u literaturi i drugi paradoksi, što, u uskom smislu, skupovno-teorijski, što, kako ih danas nazivamo, semantički.[18] Jedan od odgovora, koji je u međuvremenu postao standardnim, na skupovno-teorijske paradokse bila je aksiomatska teorija skupova, prije svega $\mathsf{ZF(C)}$: ograničenjem aksiomatske sheme sadržaja – ili, drugim riječima, njezinom zamjenom aksiomatskom shemom odijeljenosti (separacije) – onemogućena je konstrukcija paradoksā, a dodatni su aksiomi osi-

str. 105-112]. Svoj paradoks najvećega rednoga broja Burali-Forti nije vidio kao *paradoks*, već tek kao *reductio* tvrdnje da je skup rednih brojeva linearno uređen (vidi npr. Heijenoort [40, str. 104] i Cantini [6, str. 878-879]). Heijenoort [40, str. 104] kaže da je paradoks odmah izazvao zanimanje među matematičarima, ali Garciadiego [30, str. 25-26] i, pozivajući se na nj, Griffin [38, str. 350] tvrde da je, naprotiv, isprva potpuno ignoriran.

[15] Vidi u Griffin [38, str. 350] i Cantini [6, str. 879]. Prijevod je Cantorova pisma Dedekindu od 28. srpnja 1889. u Heijenoort [40, str. 113-117]. U pismu Cantor razmatra i paradoks najvećega rednoga broja i paradoks najvećega kardinalnoga broja.

[16] Cantini [6, str. 881-882].

[17] Griffin [38, str. 351-352]; Cantini [6, str. 883].

[18] Russell mnoge od njih opisuje na početku "Mathematical Logic as Based on the theory of Types" [89, str. 222-224] i u uvodu *Principia Mathematica* [122, str. 60-61]. Copi [18, str. 1-9] daje dobar uvodni opis i analizu paradoksa, a Cantini [6] noviji povijesni prijegled odnosa između paradoksā i razvoja matematičke logike.

gurali opstojnost pojedinih vrsta skupova. Russellov je odgovor, s druge strane, logički sustav kojem je dao ime 'teorija tipova'.[19]

2.2 Teorija tipova u *The Principles of Mathematics*

Prvi grubi nacrt teorije tipova Russell objavljuje već 1903. u "Appendix B" svoje *The Principles of Mathematics* [96], naslovljenom "The Doctrine of Types". Kako kaže, nauk o tipovima iznosi tek uvjetno (*tentatively*), kao moguće rješenje protuslovlja, ali koje bi trebalo dodatno razraditi da bi moglo odgovoriti na sve teškoće [96, str. 497]. Protuslovlje koje bi teorija tipova trebala razriješiti jest, naravno, protuslovlje opisano u desetom poglavlju knjige ("The Contradiction"), a za koje se kasnije ustalio naziv 'Russellov paradoks'.

Na početku iznosi Russell dvije glavne točke teorije tipova, no iz razloga koji će uskoro postati jasni razdvojit ćemo ovdje drugu točku u dva dijela:

(1) "Svaka stavačna funkcija $\phi(x)$ [...] ima, uz svoje područje istinitosti, područje značenja, tj. područje unutar kojega x mora ležati da bi $\phi(x)$ uopće bila stavak, bio istinit bilo neistinit."

(2) "[P]odručja značenja tvore *tipove*, tj. ako x pripada području značenja funkcije $\phi(x)$, onda postoji razred predmetā, *tip* x-a, od kojih svi moraju također pripadati području značenja funkcije $\phi(x)$, kako god ϕ varirao[.]"

(3) "[P]odručje je značenja uvijek ili jedan tip ili zbroj nekoliko cijelih tipova."

Ad (1). Vidimo da je pojam stavačne funkcije već na samom početku ključan za razumijevanje Russellove teorije tipova. Što su stavačne funkcije u *The Principles of Mathematics*? Taj se izraz prvi put pojavljuje upravo u tome djelu. Russell ranije u knjizi [96, str. 19] kaže: "$\phi(x)$ je stavačna funkcija (*propositional function*) ako je, za svaku vrijednost x-a, $\phi(x)$ stavak (*proposition*), određen kada je dan x." Stavačne su funkcije, dakle, funkcije koje svojim argumentima pridružuju stavke. Međutim, to objašnjenje nije dovoljno: nije *svaka* funkcija koja svojim argumentima pridružuje stavke stavačna funkcija. Na primjer, funkcija koja Sokratu pridružuje

[19] Zermelo [123] je aksiomatizirao teoriju skupova 1908., kada je Russell većim dijelom već razvio svoju razgranatu teoriju tipova. No, aksiomatska teorija skupova za logicista Russellova tipa ne bi bila posve zadovoljavajuće rješenje, ma koliko bila tehnički prikladna: aksiomatski *stipulirati* koji skupovi postoje nije za logicista prihvatljiv način utemeljenja.

stavak "Kiša pada", Platonu stavak "Ulice su mokre", a broju dva Pitagorin poučak nije stavačna funkcija.[20] Russellov je primjer stavačne funkcije "x je čovjek":

> U svakome stavku, koliko god složenom, koji ne sadrži slobodne (*real*) varijable, možemo zamisliti da je jedna od oznaka (*terms*), ne glagol niti pridjev, zamijenjena drugom oznakom: umjesto "Sokrat je čovjek" možemo staviti "Platon je čovjek", "broj 2 je čovjek" i tako dalje. Time dobivamo uzastopne stavke koji se slažu u svemu osim u jednoj promjenjivoj (*variable*) oznaci. Stavivši x za promjenjivu oznaku, "x je čovjek" izražava tip svih takvih stavaka. [96, str. 19-20]

Iako bi citat, nismo li dovoljno pažljivi s Russellovim nazivljem, mogao snažno sugerirati da stavci za Russella nisu drugo do rečenice, a stavačne funkcije izrazi koje dobijemo uklonivši iz rečenica pojedine riječi ("ne glagol niti pridjev"), to ipak nije slučaj – barem ne u *The Principles of Mathematics*. Odnos između stavačne funkcije i stavka koji stavačna funkcija pridružuje argumentu odražava se, doduše, u određenim notacijskim značajkama, tj. u strukturi izraza koji stoje za (izražavaju ili, uvjetno govoreći, imenuju) stavačne funkcije i stavke, ali ni stavci ni stavačne funkcije nisu tek izrazi.

Russell u predgovoru [96, str. xviii–xiv] kaže da riječ 'stavak' definira na način koji odstupa od njegove uobičajene uporabe, prema kojoj se "stavci [...] obično shvaćaju kao (1) istiniti ili lažni, (2) mentalni." Russell se slaže da su stavci upravo ono što je istinito ili neistinito, ali niječe da se radi o *mentalnim* entitetima jer smatra da "ono što je istinito ili neistinito općenito nije mentalno". Čini se da time želi reći da istinitost i neistinitost ne ovise o spoznavatelju i da stoga stavci kao nositelji istinitosnih vrijednosti ne mogu biti tek mentalne reprezentacije (činjenica ili stanja stvari, na primjer). Razlog zašto Russell smatra da objektivnost istinitosti nije spojiva sa stajalištem da su stavci mentalne reprezentacije jest izgleda to što u vrijeme pisanja *Principles*, ali i dugo nakon toga, općenito smatra da reprezentacionalizam neizbježno vodi u psihologizam.[21] Stavci stoga nisu reprezentacije, mentalne ili kakve drugačije, činjenica ili stanja stvari, već upravo sáme činjenice ili stanja stvari, shvaćene u ontologijski jakome smislu kao posebni složeni entiteti, neovisni o spoznavatelju, umu i općenito našim relacijama spram tih složenih entiteta. Kada mislimo, vjerujemo ili tvrdimo neki stavak, taj stavak nije

[20] Takvo "ekstenzionalno" shvaćanje stavačnih funkcija kasnije će, u svojoj kritici Russellove teorije tipova iz *Principia Mathematica*, predložiti Ramsey [83].

[21] Vidi npr. Korhonen [50, str. 163]. Korhonen opisuje reprezentacionalizam kao "gledište da je misao bitno stvar reprezentacije."

nešto (npr. rečenica ili misao) što tek imenuje ili znači neko stanje stvari, već upravo to stanje stvari samo:

> Imati značenje (*meaning*), čini mi se, pojam je zbrkano sastavljen od logičkih i psihologijskih elemenata. Sve *riječi* imaju značenje, u jednostavnome smislu da su one simboli koji stoje za nešto drugo osim njih samih. Ali stavak, osim ako nije jezični (*linguistic*), sam ne sadrži riječi: on sadrži entitete naznačene (*indicated*) riječima. [96, str. 47]

Tvrdimo li da je Mont Blanc viši od 4000 metara, ne tvrdimo misao, koja je, prema Russellu, privatna psihološka stvar, već objekt te misli, složeni entitet čija je sastavnica upravo planina o kojoj je riječ, a ne njezino ime, pojam ili bilo kakav drugi posrednik.[22] Možda neobično za današnji ontologijski ukus, također je sastavnica toga istoga složenoga entiteta i *pojam* (*concept*) označen izrazom 'viši od 4000 metara' – no ne i *izraz* 'viši od 4000 metara' i ne mentalna predodžba koja odgovara tomu izrazu. Tvrdimo li da riječ 'Russell' sadrži sedam slova – pa je time naš stavak jezični, u smislu da govori nešto o jeziku – stavak koji tvrdimo sadrži kao sastavnicu riječ 'Russell', ali ne i ime te riječi, tj. ne niz znakova koji u ovoj rečenici počinje i završava navodnicima. Općenito, stavak da neki predmet a ima svojstvo P, složeni je entitet (*complex*) čije su sastavnice (*constituents*) predmet a i pojam P; stavak da je predmet a u relaciji R s predmetom b, složeni je entitet sastavljen od predmeta a i b i pojma R, itd. Predmeti a i b pritom također mogu biti pojmovi (*concepts*) ili pak mogu biti stvari (*things*).

Tu moramo malo zastati. Da bismo razumjeli što točno Russell tvrdi o stavcima i stavačnim funkcijama, važno je uočiti da on u *Principles* zastupa neobično liberalne ontologijske poglede, svojevrsnu vrlo jaku inačicu realizma (ili platonizma, kako bismo to danas nazvali):

> Sve što može biti predmet mišljenja, ili što se može pojaviti u bilo kojem istinitom ili neistinitom stavku, ili računati kao *jedno*, nazivam *oznakom* (*term*). To je tada najšira riječ u filozofijskome rječniku. Rabit ću kao njoj istoznačne riječi jedinica (*unit*), pojedinačnost (*individual*) i bitstvo (*entity*). Prve dvije naglašavaju činjenicu da je svaka oznaka *jedno*, dok je treća izvedena iz činjenice da svaka oznaka ima bitak (*has being*), tj. u nekom smislu *jest*. Čovjek, trenutak, skup, relacija, himera, ili bilo što drugo što može biti spomenuto, svakako je oznaka; a zanijekati da je takva i takva stvar oznaka uvijek mora biti neistinito. [96, str. 43]

[22] Primjer je iz pisma Fregeu od 12. prosinca 1904. Engleski prijevod može se naći u Frege [27, str. 169].

Sve što uopće može biti predmet mišljenja *jest*, ima bitak, oznaka je. Oznake Russell [96, str. 44] dijeli na pojmove i stvari: pojmovi su ono što je naznačeno pridjevima i glagolima, tj. ono što naziva 'priroci' i 'relacije', dok su stvari one oznake koje nisu pojmovi, tj. koje se ne mogu priricati drugim oznakama – ili, drugim riječima, oznake koje u stavku mogu biti samo podmeti.[23] Pojmovi pritom za Russella nisu, ništa više nego planine, tek nekakvi mentalni entiteti, predodžbe, psihološke sastavnice misli, već zasebni, o našim mislima i tvrdnjama neovisni idealni predmeti, jednako stvarni koliko i same planine.[24] Određene složevine, cjeline (*wholes*) čiji su dijelovi (*parts*) oznake, među kojima mora biti barem jedan pojam, a koje pritom karakterizira posebno jedinstvo (*unity*) – drugim riječima, cjeline koje, za razliku od razredā, "nisu potpuno specificirane kada su svi njihovi dijelovi znani" ([96, str. 140]) – ono su, prema Russellu, što nazivamo stavcima.[25] Kako stavci sami mogu biti predmet mišljenja, bilo da su istiniti bilo neistiniti, i istiniti i neistiniti stavci *jesu*, tj. imaju bitak.[26]

Iako su stavci entiteti koji imaju bitak neovisno o tome misli li ih tko ili ne, stavci su *intenzionalni* entiteti. Dva su razloga za to; jedan je povezan s vrstama entiteta koji su sastavnice stavaka, dok se drugi odnosi na, nazovimo to tako, inten*c*ionalnu strukturu stavka. Kao prvo, barem jedna sastavnica stavka mora biti pojam, a pojmovi sami jesu intenzionalni entiteti, u smislu da koekstenzivnost pojmova ne povlači njihovu istovjetnost. Koekstenzivni pojmovi mogu biti, kako Russell kaže, "pojmovno različiti" (*conceptually diverse*) [96, str. 47]. Uzmimo standardni primjer: pojam razumske životinje i pojam bespernatoga dvonošca, čak i ako bi se doista odnosili na posve iste entitete, tj. čak i ako bi im opsezi bili istovjetni, sami očito nisu *isti* pojmovi. Stoga stavak "Sokrat je razumska životinja" i stavak "Sokrat je bespernati dvonožac" također nisu istovjetni, već samim tim što imaju *različite* pojmove kao svoje sastavnice. Kao drugo, čak

[23] Maloj zbrci pridonosi to što Russell ponegdje rabi '*adjective*' i '*verb*' za riječi koje naznačuju (*indicate*) pojmove, ponegdje pak za same pojmove, tj. priroke i relacije. Također, ponegdje '*term*' rabi općenito za sastavnice stavka, a ponegdje samo za one sastavnice koje se mogu shvatiti kao podmeti stavka. Tako, na primjer, u istom paragrafu kaže [96, str. 44–45] i da glagoli naznačuju relacije i da su "priroci [...] pojmovi, osim glagola, koji se javljaju u stavcima koji imaju samo jednu oznaku ili podmet".

[24] Russell [96, str. 46] kaže da se teorija po kojoj bi "pridjevi ili atributi ili idealne stvari, ili kako god ih zvali" bili nekako ontologijski manjkavi "čini potpuno pogrješnom i lako svedljivom na protuslovlje."

[25] Candlish [4] daje dobar prikaz Russellove teorije stavačnoga jedinstva i njezinih problema. Stevens [107] je naklonjeniji Russellovu rješenju problema stavačnoga jedinstva i smatra ga, suprotno većinskomu pogledu, uspješnijim od Fregeova.

[26] Teorija se usložnjava time što imati bitak *ne* znači ujedno i postojati. Russell [96, str. 71] strogo razlikuje bitak (*Being*) i opstojnost (*existence*): "Razlika između bitka i opstojnosti važna je, a dobro se ilustrira postupkom brojanja. Što se može brojati, mora biti nešto i svakako mora *biti*, iako nipošto ne mora posjedovati daljnju povlasticu opstojanja." Time stvarima, tj. podmetima stavaka, mogu biti i "mnoge oznake koje ne postoje, na primjer, točke u neeuklidskom prostoru i pseudopostojeći entiteti (*pseudo-existents*) nekoga romana." [96, str. 45] Razlika između opstojnosti i bitka ključna je za razlikovanje istinitih i neistinitih stavaka, ali nama ta razlika ovdje nije toliko bitna.

se i stavci koji imaju posve iste sastavnice mogu razlikovati u tome koja je sastavnica podmet stavka, tj. u tome *o* čemu je taj stavak. Za Russella tako stavci "Sokrat je čovjek" i "Čovještvo pripada Sokratu" nisu istovjetni, iako su ekvivalentni i mada se oba sastoje od istih sastavnica: Sokrata i pojma čovjeka [96, str. 45]. Naime, u prvome je slučaju stavak o Sokratu, u drugom o pojmu. Iz analogna razloga, niti stavci "A je različito od B" i "B je različito od A", na primjer, nisu istovjetni [96, str. 140].

Znajući sada što su za Russella stavci, vratimo se na naše pitanje s početka: što su stavačne funkcije? Kazali smo, stavačne funkcije pridružuju svojim argumentima odgovarajuće stavke, no kako to točno shvatiti? Što još možemo reći o stavačnim funkcijama?

Najprije, za Russella je pojam stavačne funkcije "temeljni pojam" (*fundamental notion*), koji stoga možemo objasniti, ali ne i, u pravome smislu, definirati [96, str. 19]. Zato, kazavši gore da je stavačna funkcija funkcija koja svojim argumentima pridružuje stavke, nismo, strogo gledano, dali definiciju. Glavni razlog nedefinirljivosti jest to što je pojam stavačne funkcije usko povezan s temeljnim pojmom koji izražavamo izrazima poput 'takav da' (*such that*) i 'koji' (*who*, *which*). Ti izrazi, kaže Russell, "predstavlja[ju] opći pojam zadovoljavanja (*satisfying*) stavačne funkcije" [96, str. 83]. No taj je pojam – pa time i sam pojam stavačne funkcije – dio definicije općega pojma funkcije i zato svaki pokušaj definicije stavačne funkcije uključuje poročni krug. Russell, doduše, u osmome poglavlju ("The Variable") opisuje stavačne funkcije kao razred stavaka koji dijele određenu "postojanost oblika" (*constancy of form*) [96, str. 89] pa čak i izričito kaže da je stavačna funkcija "razred svih stavaka koji nastaju varijacijom jedne oznake" [96, str. 93]. Stavačna funkcija "x je čovjek" tako bi bila skup {"Sokrat je čovjek", "Platon je čovjek", "Aristotel je čovjek", ... }.[27] Ipak, napominje da to, zbog prethodno opisane nedefinirljivosti pojma stavačne funkcije, ne treba shvatiti kao definiciju.

Međutim, čak i ako ne možemo definirati stavačne funkcije, ponešto iz do sada rečenoga o njima možemo zaključiti. Četiri su nam stvari ovdje važne. Prvo, stavačne funkcije nisu tek jezični izrazi. Drugo, kako se čini da stavačne funkcije i same mogu biti predmetom misli i mogu se "računati kao *jedno*", i one su – baš kao i stavci – entiteti, oznake, imaju bitak.[28]

[27]Na drugome mjestu, Russell [96, str. 85] sugerira da se stavačne funkcije mogu shvatiti kao, uvjetno govoreći, svojevrsne metarelacije, tj. relacije između stavaka i oznaka koje su argumenti funkcije. Funkciju "x je čovjek" možemo tako možda shvatiti kao relaciju čiji je opseg skup {⟨"Sokrat je čovjek", Sokrat⟩, ⟨"Platon je čovjek", Platon⟩, ...}.

[28]Ta je tvrdnja kontroverzna. Poglavlje VII ("Propositional Functions") sadrži napomenu da "ϕ u $\phi(x)$ nije odvojen (*separate*) i poseban (*distinguishable*) entitet" [96, str. 88], što je neke autore (npr. Cocchiarellu [15, str. 78–79]) navelo tvrditi da Russell već u *Principles* stavačne funkcije ne smatra entitetima. Iako uskoro Russell

Treće, stavačne su funkcije intenzionalni entiteti, barem u sljedećem smislu. Prema pretpostavci, funkcija "x je razumska životinja" i funkcija "x je bespernati dvonožac" ekvivalentne su: obje su zadovoljene istim skupom entiteta i stavak koji jedna pridružuje nekom argumentu ekvivalentan je stavku koji tom argumentu pridružuje druga. No, te dvije funkcije ipak nisu istovjetne, već samim tim što stavak koji argumentu pridružuje prva nije *istovjetan* stavku koji istom argumentu pridružuje druga. Četvrto, stavačne funkcije nisu isto što i pojmovi (priroci i relacije) koji su sastavnice njima odgovarajućih stavaka.[29] S druge strane, očito između njih postoji bliska veza. Funkcije kojih jezični izraz sadrži jedan pojavak slobodne varijable, npr. funkcije poput "x je čovjek", odgovaraju prirocima, dok one kojih izrazi sadrže više pojavaka slobodnih varijabli, npr. "x je istovjetan y-u", odgovaraju relacijama.

Pojasnivši donekle što su stavačne funkcije, možemo se vratiti na teoriju tipova. Skup onih predmeta kojima stavačna funkcija pridružuje istinit stavak naziva Russell područjem istinitosti (*range of truth*). Na primjer, skup ljudskih bića područje je istinitosti funkcije "x je čovjek" jer svim i samo ljudskim bićima ta funkcija pridružuje istinit stavak. Područje je istinitosti te funkcije, drugim riječima, opseg pojma čovjeka. Važno je, međutim, što Russell u (1) tvrdi da ne može bilo koji predmet biti argument bilo koje stavačne funkcije. Za neke vrijednosti varijable stavačna funkcija nije definirana, tj. argumentu ne pridružuje niti istinit niti neistinit stavak. Skup predmeta kojima stavačna funkcija pridružuje stavak, bilo istinit bilo neistinit, naziva Russell područjem značenja (*range of significance*) funkcije.

Motivacija za shvaćanje stavačnih funkcija kao parcijalnih funkcija upravo je Russellov paradoks. Paradoks je pokazao da postoje ozbiljni logički problemi s takvim izrazima poput 'skup

doista ne će pretpostavljati da su stavačne funkcije odvojeni entiteti, različiti od svojih vrijednosti, ne čini se da se 'ϕ' u gornjoj napomeni odnosi na njih. Napomena je dana u kontekstu pitanja može li se svaki stavak analizirati kao sastavljen od podmeta stavka i tvrdnje (*assertion*) o podmetu i mogu li se stavačne funkcije poistovjetiti s tvrdnjama ili se barem objasniti pomoću njih. Russell zaključuje da ne možemo svaki stavak gledati kao sastavljen od podmeta i tvrdnje i da stoga ne možemo pojam stavačne funkcije objasniti pomoću pojma tvrdnje. Stavak "Sokrat je čovjek", recimo, možemo analizirati kao sastavljen od Sokrata i tvrdnje o Sokratu, ali analogno ne vrijedi za svaki stavak. U Russellovu primjeru, "Sokrat je čovjek implicira Sokrat je smrtan" je stavak, a "x je čovjek implicira x je smrtan" je stavačna funkcija, ali "... je čovjek implicira ... je smrtan" *nije* tvrdnja. Ležerno govoreći, zamjenom oznake u stavku varijablom dobivamo stavačnu funkciju; jednostavnim *uklanjanjem* oznake, ponekad ne dobivamo ništa što bismo smatrali nekim zasebnim entitetom. To je, čini mi se, smisao Russellove napomene. Zato malo niže niti ne kaže jednostavno da stavačna funkcija nije entitet, već da "funkcijski dio stavačne funkcije nije neovisan (*independent*) entitet." Slično tvrdi i Klement [48, str. 641].

[29] Russellovo razumijevanje stavačnih funkcija *donekle* je blisko Fregeovu shvaćanju pojmova kao funkcija u "Funkcija i pojam" (i drugdje), s važnom razlikom, između ostaloga, što Frege kao vrijednost takve funkcije vidi istinitosnu vrijednost, ne stavak: "Mogli bismo bez ustezanja reći: pojam je funkcija čija je vrijednost uvijek istinosna vrijednost." [28, str. 150] Russell [96, str. 507] sam kaže da je Fregeov *Begriff* "gotovo ista stvar kao *stavačna funkcija*". Uzevši u obzir sve gore rečeno o stavačnim funkcijama u *Principles*, Russellovu tvrdnju valja uzeti oprezno.

koji ne sadrži sam sebe' i to je, čini se, navelo Russella smatrati da bi rješenje trebalo tražiti na tragu ideje da stavačna funkcija poput "x nije član skupa S" barem u nekim slučajevima nije definirana za sam skup S i da time moguće vrijednosti varijable stavačne funkcije moraju na neki način biti sustavno ograničene. Nakon što malo detaljnije opišem (3), vratit ćemo se na pitanje Russellovih razloga za (1).

Ad (2). Područja značenja tvore tipove, odnosno postoji sustavan način na koji su određena područja značenja stavačnih funkcija. Ako je funkcija $\phi(x)$ definirana za neki predmet a, onda postoji neki maksimalan skup predmetā T takav da svakomu članu toga skupa *svaka* stavačna funkcija $\psi(x)$ koja je definirana za a pridružuje stavak.[30] Takve skupove Russell [96, str. 525] naziva minimalnim tipovima. Na primjer, ako je stavačna funkcija definirana za neku pojedinačnost, npr. Sokrata, onda postoji neki skup – naime, skup svih pojedinačnosti – takav da je svaka stavačna funkcija koja sa Sokratom kao argumentom ima neki stavak kao vrijednost, definirana i za svaki član toga skupa, tj. za svaku pojedinačnost. Skup pojedinačnosti stoga je (minimalan) tip.[31] Skup skupova pojedinačnosti također je tip: ako neka funkcija ima vrijednost za neki skup pojedinačnosti kao svoj argument, onda ima i za svaki skup pojedinačnosti.

Na temelju ideje da područja značenja tvore tipove, opisuje dalje Russell hijerarhiju tipova i time hijerarhiju stavačnih funkcija koja, zanemarivši nekoliko pozadinskih logičko-metafizičkih razmatranja, dio kojih se kasnije izgubio iz rasprava o teorijama tipova, odgovara onomu što danas nazivamo jednostavnom teorijom tipova.[32] Oznake ili pojedinačnosti najniži su tip predmeta. Pojedinačnost je pritom sve ono što nije skup.[33] Russell kaže da se čini da su toga tipa svi predmeti koji su označeni jednom riječju, bilo da se radi o stvarima bilo o pojmovima.

[30]U drugoj točki Russell ne navodi eksplicitno uvjet maksimalnosti, ali on se čini nužnim: u protivnom bi i skup $\{a\}$ bio tip, a to nije u skladu s Russellovim opisom teorije tipova dalje u tekstu.

[31]Teško pitanje mogu li se pojedinačnosti o kojima Russell govori u kontekstu teorije tipova poistovjetiti s pojedinačnostima kao *oznakama* ili entitetima općenito, moramo ovdje zanemariti. No o tome pitanju, povezanom s pitanjem odnosa tipskih varijabli i Russellove tvrdnje da je varijabla u stavačkim funkcijama uvijek istinska (*true*), tj. neograničena (*unrestricted*) varijabla [96, str. 91], ovisi ispravno tumačenje Russellova razumijevanja teorije tipova i na njega ćemo se vratiti kada ćemo govoriti o razgranatoj teoriji tipova u *Principia Mathematica*.

[32]Ta razmatranja uključuju Russellovo razlikovanje između razreda kao jednoga (*class as one*) i razreda kao mnoštva (*class as many*), relacija kao intenzija (koje su pojedinačnosti) i ekstenzionalno shvaćenih relacija (koje su skupovi uređenih n-toraka) i sl.

[33]Russell [96, str. 523] zapravo kaže da je oznaka ili pojedinačnost "svaki predmet koji nije područje", ali napominje [96, str. 524] da '*range*' rabi općenito za skupove, a '*class*' samo za skupove pojedinačnosti, skupove skupova pojedinačnosti itd. Niže [96, str. 527] također govori o područjima stavaka (*range of propositions*) očito imajući na umu proizvoljne skupove stavaka. Kako nam razlika između skupova pojedinačnosti i skupova općenito ovdje nije važna, rabit ću riječ 'skup' i za *range* i za *class*. Andrea Cantini u [5] i [6], opisujući paradoks stavaka kojim završava "Appendix B", ondje gdje Russell govori o područjima (dakle, jednostavno o skupovima) stavaka piše o *tipovima* stavaka. To se ne čini ispravnim: područje svih stavaka Russell, vidjet ćemo, smatra tipom, ali nije *svako* područje (tj. skup) stavaka (ili bilo čega drugoga) ujedno područje značenja neke stavačne funkcije, tj. tip.

Smještanje pojmova među pojedinačnosti također nam govori da stavačne funkcije ne možemo jednostavno poistovjetiti s pojmovima koji su sastavnice stavaka. Idući je tip skup skupova pojedinačnosti, zatim skup čiji su članovi skupovi skupova pojedinačnosti, i tako dalje. Skup je uvijek "za jedan višega" reda od njegovih članova i stoga $x \in x$ može biti smisleno samo ako je x "tipa beskonačnoga reda" [96, str. 525]. Tipovi su i skup svih uređenih parova pojedinačnosti, skup skupova uređenih parova pojedinačnosti, tj. skup relacija (ekstenzionalno shvaćenih) između pojedinačnosti, skup relacija između uređenih parova i sl.[34] Dobivamo tako standardnu tipsku strukturu jednostavne teorije tipova. Kako ćemo vidjeti, Russell će i (1) i (2) zadržati nepromijenjenima i u svojim zrelim formulacijama teorije tipova.

Ad (3). Prema (3), minimalni tipovi, hijerarhiju kojih sam ukratko opisao gore, nisu jedini tipovi. Drugim riječima, postoje stavačne funkcije čije područje značenja uključuje više minimalnih tipova. Štoviše, Russell [96, str. 525] piše da mu se čini, iako nije siguran, da je zbroj bilo kojega broja minimalnih tipova također tip, tj. područje značenja nekih stavačnih funkcija. Značilo bi to da neke funkcije kao svoje argumente mogu imati, na primjer, i pojedinačnosti i skupove skupova pojedinačnosti.

Razlozi za (3) leže u Russellovim razmatranjima o brojevima i stavcima, za koje kaže da se nalaze izvan opisanoga niza tipova [96, str. 525]. Malo preciznije, u razmatranjima stavačnih funkcija koje pripisuju brojeve, istovjetnost i istinitost.

Broj je za Russella skup skupova, preciznije "ništa drugo do skup sličnih skupova" [96, str. 116], pri čemu se sličnost (*similarity*) razumije jednostavno kao relacija ekvivalencije među skupovima. Tako je 0 skup svih skupova bez ijednoga člana, 1 skup svih skupova koji imaju točno jedan element, 2 skup skupova s dvama elementima, itd.[35] Međutim, to znači da skupovi koji pripadaju različitim tipovima mogu imati isti broj. Općenito, "svako područje ima broj" i stoga "*sva područja* zasigurno tvore tip" [96, str. 525]. Russell time hoće reći da postoje stavačne funkcije, npr. "x ima broj", "x ima tri člana" i sl., koje su definirane, tj. imaju neki stavak kao svoju vrijednost, za *svaki* skup kao argument, neovisno o tome kojemu minimalnom tipu taj argument pripada. Područje značenja tih funkcija uključuje sve skupove i stoga, prema definiciji

[34] Čini se da Russell '*type*' ponegdje rabi dvoznačno, za područje značenja stavačne funkcije, ali i za *članove* tog područja značenja, argumente funkcije. Piše tako: "Novi niz tipova počinje parom sa smislom (*the couple with sense*). Područje takvih tipova ono je što simbolička logika tretira kao relaciju: to je ekstenzionalni pogled na relacije." [96, str. 524]

[35] Teorija tipova, kako kaže Russell, "čini očitu definiciju 0 pogrješnom; jer svaki će tip područja imati svoje nulto područje (*null-range*)" [96, str. 525]. Broj 0, prema ocrtanoj teoriji tipova, nije skup čiji je jedini član prazan skup, već skup čiji su članovi *svi* prazni skupovi, tj. prazni skupovi svakoga pojedinoga tipa.

tipa kao područja značenja stavačnih funkcija, skup svih skupova i sam je tip! Primijetimo da to znači da Russell u *Principles* smatra da postoji univerzalni skup, skup svih skupova.

Sada se možemo vratiti na pitanje Russellovih razloga za prihvaćanje (1) kao rješenja protuslovlja. Ograničenje mogućih vrijednosti varijable u stavačnim funkcijama predloženo u (1) razlikuje se od onoga što se čini kao Russellov prijedlog u slavnom pismu godinu dana ranije u kojemu Fregeu opisuje paradoks koji je otkrio. Naime, taj raniji prijedlog sugerira rješenje prema kojemu (uzevši sad u obzir razliku između Fregeovih pojmova i Russellovih stavačnih funkcija) u nekim okolnostima argumenti za koje je vrijednost stavačne funkcije istinit stavak ne tvore skup, u smislu da ne tvore cjelinu koja se može shvatiti kao zaseban entitet (tj. "ne tvore sveukupnost").[36] Konkretno, prema tome prijedlogu, ne postoji skup skupova koji nisu sami svoji članovi. Vrijednosti varijable u funkciji $x \notin x$ *ne* bi bile ograničene na neko određeno područje značenja – sve što postoji (ili barem svaki skup) argument je te stavačne funkcije – ali jednostavno ne bi *postojao* skup $\{x : x \notin x\}$ pa time ne bi niti mogao biti argument funkcije. Takvo je rješenje kasnije postalo standardnim s razvojem aksiomatskih teorija skupova. Međutim, Russell, vidjeli smo, u *Principles* prihvaća postojanje univerzalnoga skupa, skupa koji kao svoje elemente sadrži sve skupove, uključujući i sebe samoga. Funkcija $x \in x$ stoga barem za neke vrijednosti daje istinit stavak, tj. ima svoje područje istinitosti – a time, naravno, i područje značenja, *skup* svih argumenata kojima funkcija pridružuje stavak. No time postoji i skup argumenata (makar prazan) za koje je $x \in x$ neistinito, tj. za koje je $x \notin x$ istinito. Skup je tih argumenata skup skupova koji nisu svoji članovi. No, postoji li taj skup, jedini način na koji možemo izbjeći protuslovlje jest taj da nekako zaniječemo da je on legitimna vrijednost varijable u funkcijama poput $x \in x$. Paradoks, dakle, ne pokazuje da skup skupova koji nisu svoji elementi ne postoji, već samo da on, kaže Russell, "ne pripada području značenja od $x \in x$" [96, str. 525].

Daljnji razlog za (3) to je što je skup svih predmeta također tip, smatra Russell. Naime, funkcija "x je istovjetno s x" daje istinit stavak za bilo koju vrijednost varijable i stoga njezino područje značenja nije ograničeno. Skup svih stavaka također je tip jer "samo se za stavke može smisleno reći da su istiniti ili lažni" [96, str. 526]. Drugim riječima, područje značenja funkcije "x je istinito" skup je svih stavaka. Međutim, pretpostavka da skup svih stavaka tvori tip vodi do problema koji Russell prepoznaje kao glavnu preprjeku prihvaćanju teorije tipova – protuslovlju

[36] Vidi u Heijenoort [40, str. 125].

koje će se kanije nazvati paradoksom stavaka.[37]

Opišimo ukratko paradoks stavaka. Kako stavci tvore tip, tj. postoji skup svih stavaka, bilo koji broj proizvoljnih stavaka također tvori skup. No svakomu (nepraznomu) skupu stavaka m odgovara jedinstven logički umnožak (*logical product*) toga skupa stavaka $\wedge`m$. Intuitivno, logički umnožak nekog skupa stavaka m stavak je koji kaže da su svi stavci iz skupa m istiniti, stavak "svi članovi m-a su istiniti". Logički umnožak skupa stavaka, barem u slučaju konačnih skupova, odgovara konjunkciji stavaka koji su elementi toga skupa.[38] Također, prema Russellu, različiti skupovi stavaka imaju različite logičke umnoške. Na primjer, logički umnožak skupa $\{p, q \wedge r\}$ i logički umnožak skupa $\{p \wedge q, r\}$ "iako ekvivalentni, nipošto nisu istovjetni" [96, str. 27]. Postoji stoga bijekcija između skupova stavaka i stavaka koji su logički umnošci, tj. "relacija jedan-jedan svih područja stavaka prema nekim stavcima, što izravno protuslovi Cantorovu teoremu" [96, str. 527]. S bijekcijom između skupova stavaka i njihovih logičkih umnožaka, paradoks lako slijedi dijagonalizacijom u Cantorovu stilu. Neka je w skup svih logičkih umnožaka takvih da oni sami nisu članovi skupa stavaka kojega su umnošci. Je li $\wedge`w$, tj. logički umnožak skupa w, sam član skupa w? Oba odgovora povlače svoj nijek. Paradoks stavaka analogan je Russellovu paradoksu, ali, dok je gore ocrtana hijerarhija teorije tipova dovoljna kako bi se izbjegli potonji, nemoćna je blokirati paradoks stavaka. Paradoks, kaže Russell, "izgleda pokazuje da nema takvoga područja poput w, ali nauk o tipovima ne pokazuje zašto nema takva područja" [96, str. 527].

Dvije su glavne pretpostavke koje omogućuju izvođenje protuslovlja. Prva je pretpostavka intenzionalnosti stavaka i stavačnih funkcija: ekvivalentne stavačne funkcije – funkcije s istim područjem istinitosti (i područjem značenja) – nisu nužno istovjetne. Doista, *ako* bi ekvivalentnost povlačila istovjetnost, Russell argumentira [96, str. 527-528], protuslovlje se ne bi moglo izvesti. U tom bi slučaju, naime, logički umnošci skupa stavaka m i skupa stavaka $m \cup \wedge`m$ bili istovjetni: $\wedge`m$ ("svaki član m-a je istinit") je, naime, ekvivalentan stavku $\wedge`(m \cup \wedge`m)$ ("svaki stavak koji bilo da je član m-a bilo da tvrdi da je svaki član m-a istinit, jest istinit").

[37]Russell zapravo opisuje dva problema vezana uz prihvaćanje skupa svih stavaka kao tipa – prvi je taj što se čini da bi broj stavaka morao biti velik barem koliko i broj pojedinačnosti i ujedno da stavaka ne bi smjelo biti više od pojedinačnosti – ali prepoznaje paradoks stavaka kao "veću teškoću" [96, str. 527]. Detaljna analiza paradoksa stavaka može se naći npr. u Fuhrman [29] i Cantini [5]. Russell u rujnu 1902. obavještava Fregea o paradoksu i u raspravi koja je uslijedila (vidi Frege [27, str. 147-170]), Frege smatra da se razlikovanjem između smisla (*Sinn*) i značenja (*Bedeutung*) paradoks izbjegava. Klement [47] pokazuje, međutim, da se paradoks stavaka, pod određenim uvjetima, može formulirati i unutar Fregeova sustava.

[38]Russell [96, str. 527] daje dvije formulacije paradoksa stavaka, jednu u terminima logičkih umnožaka, drugu u terminima stavaka "svi m-ovi su istiniti". Vidi također Fuhrman [29, str. 25].

No ako bi $\wedge`(m \cup \wedge`m)$ bilo istovjetno s $\wedge`m$, to bi značilo da je stavak $\wedge`m$ logički umnožak i skupa kojega sam nije član (m) i ujedno skupa kojega jest član ($m \cup \wedge`m$). Stoga ne bi bilo skupa w svih logičkih umnožaka takvih da oni sami nisu članovi skupa kojega su umnošci. Međutim, to je rješenje za Russella neprihvatljivo, "jer je prilično očigledno (*self-evident*) da ekvivalentne stavačne funkcije često nisu istovjetne." [96, str. 528] Primjer koji daje funkcije su "x je parni prosti broj različit od 2" i "x je mudrih djela i budalastih izjava Karla II.". Čak i ako obje funkcije daju istinite stavke samo s brojem 0 kao argumentom, "tko će tvrditi" da su one istovjetne?

Druga je pretpostavka, naravno, da je skup svih stavaka tip. Russell je svjestan srodnosti dvaju paradoksa i razmišlja o tome da bi oba morala imati slično rješenje:

> Bliska analogija ovoga protuslovlja s onim razmatranim u Poglavlju X snažno sugerira da oba moraju imati isto rješenje, ili barem vrlo slična rješenja. Moguće je, dakako, držati da su stavci sami različitih tipova, i da logički umnošci moraju imati stavke samo jednoga tipa kao faktore. Ali ta se sugestija čini grubom i jako umjetnom. [96, str. 528]

Razumljiva je Russellova nesklonost podijeliti stavke u različite tipove. Povlačilo bi to, između ostalog, da se stavačna funkcija "x je istinito" ne može primijeniti na sve stavke, tj. da bi se ono što nam se čini kao jedinstven pojam istinitosti također moralo razbiti na onoliko različitih pojmova koliko je tipova stavaka. Nekoliko godina kasnije Russell će prihvatiti to rješenje i potpuno napustiti (3).

2.3 *Intermezzo*

Tri su za našu priču važne epizode u Russellovu filozofijskome razvoju između prvoga nacrta teorije tipova u *The Principles of Mathematics* [96] i prve zrele inačice teorije tipova u "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" [89] pet godina kasnije. Prva je vezana uz slavnu eliminaciju određenih opisa u "On Denoting" [86] i Russellovo (navodno) udaljavanje od platonizma prema ontologijskoj štedljivosti i ideji da bi rješenje paradoksā moglo ležati u eliminaciji problematičnih entiteta (skupova, na primjer). Druga je (navodno) neuspješan pokušaj izgradnje tzv. supstitucijske teorije razredā i relacija, dijelovi koje će ući u "službenu" formulaciju razgranate teorije tipova u *Principia Mathematica* [122], iako supstitucijsku teoriju

Russell napušta nakon otkrića da je u njoj također izvedljivo protuslovlje. Treća je rasprava s Henrijem Poincaréom na stranicama *Revue de Métaphysique et de Morale*, tijekom koje će Russell (navodno) usvojiti ili razviti nekoliko središnjih pojmova razgranate teorije tipova, prije svega tzv. načelo poročnoga kruga.

2.3.1 Eliminacija označavajućih fraza

Vidjeli smo da su Russellovi ontologijski pogledi u vrijeme pisanja *Principles* vrlo liberalni i da smatra da bilo što što može biti predmetom mišljenja u nekom smislu "ima bitak". Razlog za to leži, kako je kasnije napisao u uvodu drugoga izdanja [96, str. x], u pogrješnome pogledu na jezik, prema kojem "svaka riječ koja se pojavljuje u rečenici mora imati *neko* značenje", pri čemu se značenje riječi razumije kao ono na što referira "riječ u izolaciji", tj. neovisno o jezičnome kontekstu u kojem se ta riječ javlja. Russell u to vrijeme, prisjetimo se, stavke razumije kao o umu neovisne složene entitete čije su sastavnice također o umu neovisni entiteti, bilo stvari bilo pojmovi. Ako svaka riječ koja se pojavljuje u jezičnom izrazu nekoga stavka ima značenje – tj. simbol je koji stoji za neki entitet – taj je entitet i sam sastavnica stavka u pitanju. Međutim, takav pogled na jezik čini rečenice poput "Sadašnji francuski kralj je ćelav", "Nema razlike između A i B" ili "Okrugli kvadrat ne postoji" vrlo teškima za logičku analizu. Ako je Francuska republika, ako se A ne razlikuje od B i ako je nemoguće da postoji okrugli kvadrat, kako sadašnji francuski kralj, razlika između A i B i okrugli kvadrat mogu biti sastavnice stavaka? Hoćemo li kazati da "Sadašnji francuski kralj je ćelav", iako savršeno razumljiva rečenica, zapravo ne izražava nikakav stavak? Ili možda da rečenica doista izražava stavak, ali stavak čija je sastavnica *nepostojeći* predmet (što god to točno značilo), naime sadašnji francuski kralj?

U "On Denoting", objavljenom 1905., Russell iznosi svoju novu teoriju značenja tzv. označavajućih fraza (*denoting phrases*).[39] Označavajućim frazama naziva Russell one koje počinju nekim od izraza koji u naravnim jezicima vrše ulogu količitelja (npr. izraze poput 'neki čovjek', 'bilo koji čovjek', 'svi ljudi' i sl.) te određene opise, tj. izraze koji se odnose na jedan jedini entitet ili čija je funkcija specificirati samo jedan predmet (npr. 'sadašnji francuski kralj', 'prvi čovjek na Mjesecu', 'glavni grad Hrvatske').[40] Prema predloženoj teoriji, označavajuće fraze

[39] Russell u članku, uspoređujući svoju teoriju s Fregeovom, rabi izraz '*meaning*' za Fregeovo *Sinn*, a '*denotation*' za *Bedeutung*, no napominje da u teoriji koju sam zastupa govori samo o *denotation* [86, str. 483]. Kako nam Fregeovo razlikovanje ovdje nije važno, radi ujednačenosti s Russellovim nazivljem u *Principles*, prevodim '*denotation*' jednostavno kao 'značenje'. Pavel Gregorić preveo je članak na hrvatski kao "O označavanju" [102].

[40] U jezicima koji sadrže gramatičke članove, poput engleskoga, određeni su opisi oni koji započinju određenim

uopće *nemaju* značenje izvan konteksta rečenice u kojoj se javljaju – odnosno, za razliku od imenā, sami po sebi nisu simboli koji stoje za neki entitet. Označavajuće fraze, naravno, pridonose značenju rečenice, no način na koji to čine složeniji je od pukoga označavanja nekoga predmeta koji je sastavnica stavka izraženog tom rečenicom.

Uzmimo za primjer rečenicu "Sadašnji francuski kralj je ćelav." Ta bi se rečenica, prema teoriji koju predlaže Russell, trebala tumačiti na sljedeći način: "Postoji jedinstven predmet koji je sadašnji francuski kralj i taj je predmet ćelav." Ili, malo dulje: "Postoji neki predmet koji je sadašnji francuski kralj, sve što je sadašnji francuski kralj je taj predmet i taj predmet je ćelav." Uz pomoć danas standardne logičke notacije, i uz očita značenja priročnih slova, prijevod bi izgledao ovako:

$$\exists x((Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow x = y)) \wedge Cx)$$

Općenito, svaka rečenica kojom se tvrdi da neki predmet koji jedinstveno zadovoljava opis ϕ posjeduje svojstvo ψ, ima, prema Russellovoj analizi, sljedeću logičku strukturu:

$$\exists x((\phi(x) \wedge \forall y(\phi(y) \rightarrow x = y)) \wedge \psi(x))$$

Međutim, vidimo sada da je u parafrazi rečenice "Sadašnji francuski kralj je ćelav" određeni opis nestao – ništa u prijevodu nije ostalo što bi nas obvezalo tvrditi da mora biti nekakvoga predmeta, stvarno postojećega ili ne, označenoga izrazom 'sadašnji francuski kralj', koji bi bio sastavnica rečenicom izraženoga stavka. Zagonetka je uklonjena: 'sadašnji francuski kralj' pridonosi značenju rečenice, ali ne tako da sam označava neki predmet, sastavnicu stavka, već samo u kontekstu cijele rečenice. Isto, dakako, vrijedi i za ostale određene opise i druge označavajuće fraze. Russellovim riječima, "označavajuća je fraza bitno *dio* rečenice, i nema [...] nikakvo značenje (*significance*) sama za sebe" [86, str. 488]. Takve će izraze Russell kasnije nazvati nepotpunim simbolima.

Iz mogućnosti kontekstualne eliminacije određenih opisa i drugih označavajućih fraza izvest će Russell dalekosežne metafizičke i epistemičke posljedice.[41] Ono što je nama ovdje važno jest zamisao da bi se metoda kontekstualne eliminacije denotirajućih fraza mogla iskoristiti u rješenju paradoksā. Naime, što ako bi se za izraze koji naizgled označavaju logički problematične

članom, npr. '*the present king of France*', '*the capital of Croatia*' i sl.

[41]Kovač [51, str. 17-19, 56-58] daje sažet ali informativan prikaz filozofijske važnosti Russellove teorije određenih opisa.

entitete također moglo pokazati da nestaju u ispravnoj logičkoj analizi? Ako bi se za rečenice koje naizgled govore o skupovima, na primjer, pokazalo da se mogu parafrazirati na način da ne sadrže izraze koji referiraju na skupove, skupove bismo mogli u potpunosti eliminirati iz naše ontologije. U autobiografskome eseju iz 1943. "My Mental Development" [97] prisjeća se Russell važnosti teorije opisa:

> Ono što je bilo važno u toj teoriji jest otkriće da se, analizirajući rečenicu koja ima značenje, ne mora pretpostaviti da svaka posebna riječ ili fraza ima značenje sama za sebe. [...] Uskoro se pokazalo da se simboli za razrede (*class-symbols*) mogu tretirati poput opisa, tj. kao dijelovi bez značenja rečenica koje imaju značenje. To je omogućilo vidjeti, na općenit način, kako je moguće rješenje protuslovljā. [97, str. 13-14]

Vrlo brzo nakon "On Denoting" razradit će Russell tu zamisao i predložiti tzv. teoriju bez razreda kao rješenje logičkih paradoksa.

2.3.2 Teorija bez razredā

Prijedlog da bi rješenje protuslovljā teorije skupova moglo ležati u odbacivanju pretpostavke da doista postoje takvi entiteti poput skupova iznosi Russell već iste godine u članku "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" [87].[42] Članak je važan za razumijevanje Russellove motivacije i argumentacije u njegovoj kasnijoj formulaciji razgranate teorije tipova, iako se u samome tekstu teorija tipova uopće izričito ne spominje kao mogući odgovor na paradokse. Stoga, prije nego opišemo ukratko u čemu se sastoji Russellov prijedlog, uočimo nekoliko značajnih odstupanja od ideja opisanih u *Principles*, prije svega onih u nacrtu teorije tipova u Dodatku B.

(1) Stavačna je funkcija od x, kaže Russell, "svaki izraz $\phi!(x)$ čija je vrijednost, za svaki x, stavak" [87, str. 136].[43] Slično, naravno, i za stavačne funkcije s dvjema i više varijabla. Jesu li stavačne funkcije sada za Russella doista tek jezični izrazi? Kako se karakterizacija stavačnih

[42] Članak je zaprimljen 24. studenoga 1905., a 14. prosinca pročitan je pred Londonskim matematičkim društvom (*London Mathematical Society*). Važna bilješka na kraju članka dodana je 5. veljače 1906. Sam članak odgovor je matematičaru Ernestu Hobsonu [43] na njegovu kritiku transfinitnoga dijela teorije skupova, uključujući Russellovu (logicističku) definiciju kardinalnih brojeva iz *Principles*.

[43] Zanimljiva je notacijska promjena uporaba uskličnika u izrazima za stavačne funkcije. Kasnije, u [89] i [122], pomoću uskličnika označavat će Russell samo one stavačne funkcije koje će nazvati priričnima.

funkcija kao izrazā nalazi samo na tome jednome mjestu u članku, jedan je mogući odgovor da se tu radi samo o ležernosti u izražavanju ili navodno uobičajenoj Russellovoj nemarnosti u razlikovanju izraza od onoga za što izraz stoji, a ne o stvarnoj promjeni u ontologijskom statusu stavačnih funkcija u njegovoj filozofiji.[44] Međutim, stvar je malo složenija. Glavni pozadinski problem članka upravo je to kako valja shvatiti stavačne funkcije. Kako ćemo vidjeti, Russell, kao odgovor na paradokse, tvrdi da stavačne funkcije nisu uvijek odvojivi (*separable*) entiteti, različiti od svojih vrijednosti. No pitanje je tada, naravno, u kojim okolnostima i koje stavačne funkcije *jesu* zasebni entiteti? Jedan od prijedloga koje razmatra taj je da stavačne funkcije zapravo *nikada* nisu zasebni entiteti – ili, možda bolje, da nijedna stavačna funkcija nije zaseban entitet. Međutim, ako bi se taj prijedlog pokazao istinitim, *što* bi bile stavačne funkcije, ako već ne "odvojivi entiteti"? Odgovor bi morao biti, čini se, "ništa više od izraza".

(2) 'Stavačna funkcija', 'norma' (*norm*) i 'svojstvo' (*property*) rabe se u tekstu kao istoznačnice. 'Norma' nije problem, tu se radi samo o notacijskoj razlici. Nije problem niti to što Russell, poopćujući pojam svojstva, govori o stavačnoj funkciji s dvjema varijablama kao o "dvojnome svojstvu" (*dual property*) [96, str. 142]. No, barem na prvi pogled, sámo poistovjećivanje stavačnih funkcija sa svojstvima jest važna promjena u odnosu na *Principles*. Svojstva su u *Principles* isto što i tzv. razredni pojmovi (*class-concepts*) iliti *priroci*. Dakle, svojstva su ondje pojmovi – u Russellovu smislu pojmova kao idealnih entiteta koji mogu biti sastavnice stavaka – koji definiraju razrede, tj. čiji su opsezi razredi.[45] Međutim, prisjetimo se, stavačne funkcije u *Principles* nisu isto što i pojmovi (priroci i relacije) koji su sastavnice vrijednosti te funkcije (tj. stavaka). Time stavačne funkcije *nisu* isto što i razredni pojmovi, odnosno svojstva. No, također smo vidjeli da između stavačnih funkcija i pojmova postoji bliska veza. Russell tu

[44] Upozoriti na Russellovu nemarnost u razlikovanju izrazā od onoga što izrazi označavaju postalo je nešto poput standardne napomene u literaturi. Na primjer, Church [14, str. 748] u 4. fusnoti piše da određeni sporni odlomci u "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" i *Principia Mathematica* sadrže miješanje uporabe i spominjanja ili neku sličnu pogrješku koja bi mogla biti jednostavno nepažnja. U poglavlju "Russell's Theory of Types" svoje *Set Theoty and Its Logic* [82] Quine čak pet puta spominje Russellov propust razlikovanja stavačnih funkcija kao atributa i relacija-u-intenziji od stavačnih funkcija kao priroka (u jezičnom smislu) i otvorenih rečenica. Landini [59, str. 34], inače vrlo sklon Russellu, također piše da je "ozloglašeno nemaran glede uporabe i spominjanja". Slično napominje i Klement [48, str. 634] pa kaže da je Russell "prilično neprecizan i nemaran u izražavanju, posebice kada je riječ o uporabi i spominjanju".

[45] 'Svojstvo' u *Principles* nema tehnički prizvuk kakav imaju 'prirok' i 'razredni pojam', ali iz teksta se čini da se doista radi o istoznačnicama. Na primjer, Russell piše da "razredni pojam sam nije skup (*collection*), već svojstvo pomoću kojega je skup definiran" [96, str. 115], a "zajedničko je svojstvo dviju oznaka bilo koja treća oznaka s kojom obje imaju jednu te istu relaciju." [96, str. 166] Doduše, ponegdje Russell nije siguran jesu li priroci i razredni pojmovi ista stvar ili među njima postoji kakva razlika pa piše [96, str. 54-55] da "[p]ojmovi koji su priroci mogu se nazivati i razrednim pojmovima, jer iz njih nastaju (*they give rise to*) razredi", ali također i "[r]azredni se pojam malo razlikuje, ako uopće, od priroka" i da "razredni je pojam blisko srodan (*closely akin*) priroku".

vezu u *Principles* opisuje ovako: “Značajka je razrednih pojmova, za razliku od oznaka općenito, to što je ‘x je u’ stavačna funkcija kada, i samo kada, u je razredni pojam.” [96, str. 56] Na primjeru, “x je čovjek” stavačna je funkcija, dok je pojam “čovjek” razredni pojam, tj. svojstvo. Russell sada, čini se, tu razliku više ne povlači.

Moguće objašnjenje za Russellovo poistovjećivanje stavačnih funkcija i svojstava u “On Some Difficulties...” leži u promjeni u njegovu razumijevanju jezika, preciznije u napuštanju gledišta da svaka riječ koja se javlja u jezičnome izrazu stavka mora označavati neku punopravnu sastavnicu stavka. Shvaćajući jezik na taj način, čini se da je Russell smatrao da riječ ‘je’ u rečenici ‘Sokrat je čovjek’ također stoji za *neku vrstu* relacije između Sokrata i svojstva “čovjek”, relaciju koja je sastavnica rečenicom izraženoga stavka jednako kao i sam Sokrat i pojam čovjeka.[46] Ako jest tako, razumljivo je zašto Russell u *Principles* ne može poistovjetiti stavačne funkcije sa svojstvima: stavak “Sokrat je čovjek” ne sastoji se samo od Sokrata, kao podmeta stavka, i pojma čovjeka, kao svojstva, već također i od određene relacije označene kopulom. S promjenom u shvaćanju jezika, relacija označena s ‘je’ možda nestaje kao sastavnica stavka i stavak “Sokrat je čovjek” sadrži sada samo podmet i svojstvo – podmet je argument, a svojstvo stavačna funkcija. S druge strane, lako je moguće da je Russellova identifikacija stavačnih funkcija kao svojstava u tome članku tek aproksimacija primjerena kontekstu rasprave, aproksimacija opravdana gore opisanom bliskom vezom između stavačnih funkcija i razrednih pojmova, no koju ne treba shvatiti kao promjenu u Russellovom pogledu na narav stavačnih funkcija.

(3) Analizom i poopćenjem Burali-Fortijeva paradoksa rednih brojeva, Russell u članku opisuje zajedničku strukturu paradoksā teorije skupova, dajući ono što će Priest [78] kasnije nazvati Russellovom shemom:[47]

> Ako je dano svojstvo ϕ i funkcija f, takvi da, ako ϕ pripada svim članovima od u, $f`u$ uvijek postoji, ima svojstvo $\phi$ i nije član od $u$, onda pretpostavka da postoji razred $w$ svih oznaka koje imaju svojstvo $\phi$ i da $f`w$ postoji vodi zaglavku da $f`w$

[46] Russell [96, str. 49] doduše piše da “*je* u tom stavku ne može izražavati relaciju u običnom smislu”, ali dodaje da “relacija između Sokrata i ljudskosti (*humanity*) zasigurno je *implicirana* (*implied*), i vrlo je teško pojmiti (*conceive*) stavak koji ne izražava uopće nikakvu relaciju.”

[47] Russell [87] analizira i predlaže moguća rješenja samo za protuslovlja u teoriji skupova, tj. za Burali-Fortijev, Cantorov, Russellov i srodne paradokse. Paradokse koje danas nazivamo semantičkima Russell u članku ne spominje. Priest [78], međutim, argumentira da se Russellova shema odnosi na sve paradokse samoodnošenja, ne samo na skupovno-teorijske. Landini [62] odbacuje Priestovo načelo jedinstvenoga rješenja (*Principle of Uniform Solution*) i argumentira da Priestova shema nije primjenjiva na “paradokse definirljivosti”.

> ujedno i ima i nema svojstvo ϕ. [87, str. 142]

Komentirajući dalje opću strukturu opisanih antinomija, Russell dijagnosticira zajednički izvor protuslovljā:

> [P]rotuslovlja proizlaze iz činjenice da, prema sadašnjim logičkim pretpostavkama, postoji ono što možemo nazvati *samoproizvodećim* (*self-reproductive*) procesima i razredima. To jest, postoje neka svojstva takva da, ako je dan bilo koji razred oznaka, od kojih sve imaju takvo svojstvo, uvijek možemo definirati novu oznaku koja također ima svojstvo u pitanju. Stoga nikada ne možemo skupiti (*collect*) *sve* oznake koje imaju rečeno svojstvo u cjelinu; jer, kad god se ponadamo da ih imamo sve, skup (*collection*) koji imamo smjesta počinje stvarati (*proceeds to generate*) novu oznaku koja također ima rečeno svojstvo. [87, str. 144]

Dvije stvari u gornjemu citatu vrijedi uočiti. Prvo, primijetimo neobično "dinamičan" diskurs koji se u njemu rabi. Russellov opis nastanka protuslovljā ne treba, dakako, shvatiti odviše doslovno, ali govor o proizvodnji, procesima i stvaranju upadljivo odstupa od izrazito platonističkoga ranoga Russellova shvaćanja predmetā matematike i logike općenito. Kako ćemo vidjeti, za neke od predmeta matematike za koje obično smatramo da postoje (npr. za skupove) dopušta u to vrijeme Russell da smo u krivu i da ispravna logička analiza može pokazati da oni zapravo *ne* postoje – ili barem da ne moramo pretpostaviti da postoje – ali što god nakon analize ostalo kao pravi predmeti matematike (možda npr. stavci), "napučuje", kako će to poslije ironično sam opisati, "bezvrjemeno kraljevstvo bitka" [96, str. x]. Dinamički i konstruktivistički idiom često će se kasnije javljati u Russellovu izlaganju razgranate teorije tipova u *Principia Mathematica* i davati osnovu za optužbu zbog navodnoga konstruktivizma razgranate teorije tipova, npr. u Gödelovoj [32] i Quineovoj [82] kritici.

Drugo, u opisu "samoproizvodećih procesa i razreda" čini se da imamo već sve potrebne sastojke za ideju da bi rješenje protuslovljā moglo ležati u tome da oznake "stvorene" pokoličavanjem nad nekim razredom predmeta ne smiju same biti dio toga razreda. Načelo poročnoga kruga, koje će Russell nekoliko godina kasnije usvojiti, tako se ne čini radikalnom promjenom, već prije prirodnim nastavkom prethodnih Russellovih pokušaja odgovora na paradokse. Također, ako sam u pravu, kako je gornja dijagnoza izvora protuslovljā dana u kontekstu rasprave o skupovno-teorijskim, a ne o semantičkim paradoksima, usvajanje načela poročnoga kruga ne bi trebalo objašnjavati tek kao motivirano željom za izbjegavanjem semantičkih paradoksa.

(4) U članku ne spominje Russell mogućnost izbjegavanja protuslovlja na način da se stavačne funkcije shvate kao parcijalne funkcije, definirane samo za entitete određenoga tipa ili tipova, kako je predložio u *Principles*. Umjesto toga, vratio se na ideju koja je bliska njegovoj sugestiji u pismu Fregeu. Varijable stavačnih funkcija neograničene su, tj. mogu za argumente uzimati sve što postoji, ali ne definira svaka stavačna funkcija razred, niti su sve stavačne funkcije – dakle, svojstva – "odvojivi entiteti koji mogu biti stavljeni kao argumenti bilo drugim svojstvima bilo njima samima" [87, str. 140]. Paradoksi teorije skupova pokazuju da ne određuje svaka stavačna funkcija razred, a paradoks svojstava – parafraza Russellova paradoksa prirokā – da nije svaka stavačna funkcija entitet.[48] Protuslovlja upravo nastaju zbog pretpostavke da "izvjesne stavačne funkcije određuju razrede, kada, u stvari, to ne čine" [87, str. 140] i da je svojstvo "uvijek entitet koji može biti odvojen (*detached*) od argumenta o kojemu je tvrđeno." [87, str. 140] Analogno, dakako, vrijedi i za relacije. One stavačne funkcije koje definiraju razrede i relacije i jesu zasebni entiteti naziva Russell priričnima (*predicative*), ostale naziva nepriričnima (*non-predicative*). Za rješenje protuslovljā stoga, kaže, "trebamo pravila za odlučivanje koje su norme prirične a koje nisu, osim ako ne usvojimo gledište [...] da *nijedna* norma nije prirična." [87, str. 141] Tu u igru ulazi njegova teorija bez razreda.

Russell predlaže tri različita moguća pristupa za rješenje protuslovljā u teoriji skupova. Ta tri pristupa, redom kojim ih izlaže, naziva cikcak-teorijom (*zigzag theory*), teorijom ograničenja veličine i teorijom bez razreda (*no-classes theory*). Prema cikcak-teoriji, prirične su samo one stavačne funkcije koje su, u nekom smislu, dovoljno jednostavne; prema teoriji ograničenja veličine, prirične su one čije ekstenzije nisu "prevelike" da bi bile razredi; prema teoriji bez razreda, *nijedna* stavačna funkcija nije prirična, tj. nijedna nije zaseban entitet i nijedna ne definira razred – niti za stavačne funkcije niti za razrede uopće ne moramo pretpostaviti da postoje.[49] U napomeni naknadno dodanoj na kraju članka, Russell kaže da više "ne osjeća gotovo nimalo sumnje" da upravo ta posljednja teorija pruža "potpuno rješenje svih teškoća".[50]

[48]Russell izgleda pretpostavlja da su upravo one funkcije koje ne definiraju skupove ujedno one koje nisu zasebni entiteti. To jest prirodno zaključiti, ali Russell za to nije ponudio argument, a barem se na prvi pogled čini načelno mogućim da tomu nije tako.

[49]Gödel [32, str. 124-125] tako opisuje cikcak-teoriju kao intenzionalnu, a ograničenje veličine kao ekstenzionalnu teoriju i napominje da je, dok se standardne aksiomatske teorije skupova mogu smatrati razvijanjem potonjega pristupa, Quineov [80] sustav NF srodan Russellovoj cikcak-teoriji. Quineova teorija skupova NF, u usporedbi sa standardnom ZF(C), relativno je malo poznata, ali detaljan prikaz NF-a i srodnih sustava može se naći u Forster [24]. Pristup srodan Quineovoj teoriji skupova primjenjuje i Cocchiarella [16] u razvijanju netipske (*type-free*) teorije atributa. Dobar sažet prikaz Russellove cikcak-teorije i konteksta njezina nastanka daje Urquhart [119].

[50]Landini [60, str. 245] tvrdi da razlog odbacivanja prvih dviju teorija leži u Russellovu logicizmu: i cikcak-

2.3.3 Supstitucijska teorija

Nakon "On Some Difficulties", Russell intenzivno radi na razradi teorije bez razreda, koju sada naziva supstitucijskom teorijom, i 1906. piše članak "On the Substitutional Theory of Classes and Relations" [100]. Nažalost, ubrzo otkriva da je u teoriji također izvedivo protuslovlje, koje danas znamo kao p_0/a_0 paradoks, i članak ostaje neobjavljen za njegova života.[51]

U supstitucijskoj teoriji, kako kaže Russell, nijedna se stavačna funkcija ne uzima kao poseban entitet i nijedna ne definira razred. Supstitucijska teorija, drugim riječima, ne pretpostavlja opstojnost niti stavačnih funkcija niti razreda. Svega su dvije "vrste" entiteta pretpostavljene teorijom: stavci i proizvoljne sastavnice stavaka. Stavci su pritom i dalje otprilike ono što danas nazivamo stanjima stvari ili činjenicama, a ne (u uskome smislu) semantički entiteti. Jednako tako, sastavnicama stavaka i dalje može biti bilo što što jest, sve što ima bitak, bilo koji entitet.

U skladu s eliminacijom stavačnih funkcija i skupova, Russell mijenja notaciju i sada umjesto 'ϕx' (ili '$\phi!x$'), "gdje notacija neizbježno sugerira opstojnost nečega označenoga s 'ϕ'" [87, str. 155], piše '$p/a; x!q$'. Izraz '$p/a; x!q$' atomarna je formula supstitucijske teorije, koja, u svojemu intendiranome neformalnome značenju, kaže da supstitucija nekog entiteta x na mjesto sastavnice a u stavku p rezultira stavkom q. Pojam supstitucije tu je primitivan pojam, a osnovna je ideja da postoji određena strukturalna sličnost između onih stavaka koji se sastoje od djelomično istih sastavnica koje vrše istu ulogu ili zauzimaju isti "položaj" u tim stavcima. Na primjer, stavak "Platon je čovjek" strukturalno je sličan stavku "Sokrat je čovjek" – razlika je tek u tome što u prvome stavku Platon zauzima onaj položaj koji u drugom zauzima Sokrat. Tu strukturalnu bliskost stavaka izražava Russell tako što kaže da je "Platon je čovjek" rezultat supstitucije Platona na mjesto Sokrata u stavku "Sokrat je čovjek". Supstitucija, dakle, za Russella

teorija i teorija ograničenja veličine moraju *stipulirati* koji su skupovi i svojstva dopušteni, no takve stipulacije Russell ne bi smatrao logičkim istinama.

[51] Članak je zaprimljen u travnju 1906., dakle svega dva mjeseca nakon bilješke dodane na kraju "On Some Difficulties", a u svibnju je pročitan pred Londonskim matematičkim društvom. Izgleda da vrlo brzo nakon toga Russell u supstitucijskoj teoriji otkriva protuslovlje jer članak povlači prije objavljivanja. Objavljen je tek posthumno u [99]. Važnost supstitucijske teorije kao "nedostajuće karike između Russellove teorije označavanja i *Principia Mathematica*" prvi je, čini se, prepoznao Grattan-Guinness [35], iako ju sam vidi uglavnom kao pokušaj spašavanja osnovnih ideja iz *The Principles of Mathematics* koje će Russell, navodno, uskoro potpuno napustiti, a ktomu prepun pogrješaka uporabe i spominjanja. Opsežnu i puno naklonjeniju analizu supstitucijske teorije ponudio je Gregory Landini u *Russell's Hidden Substitutional Theory* [59], kojom je, uz tehničku rekonstrukciju formalnoga sustava supstitucijske teorije, bačeno novo svjetlo na ulogu supstitucijske teorije u razvoju razgranate teorije tipova u *Principia* i Russellovu filozofijsku motivaciju iza razgranate teorije. Landiniju također dugujemo otkriće (i imenovanje) p_0/a_0 paradoksa, skrivenoga u Russellovim neobjavljenim rukopisima, zbog kojega Russell napušta supstitucijsku teoriju. Paradoks je otkriven 1987. i prvi puta objavljen u [57]. Isti autor u [60] daje izvrstan sažet prikaz supstitucijske teorije. Izlaganje Russellove supstitucijske teorije u ovome radu posve se oslanja na Landinijevu rekonstrukciju i filozofijsku interpretaciju iz [59] i [60].

nije puka jezična operacija: ne supstituiraju se izrazi u rečenici, već entiteti u stanjima stvari. Za različite vrijednosti x-a dobivamo time različite stavke, upravo one koje bismo u staroj terminologiji nazivali vrijednostima odgovarajuće stavačne funkcije. No, u novoj notaciji nestaju izrazi za stavačne funkcije, baš kao što u logičkoj analizi nestaju određeni opisi. Kao što nas ispravna logička analiza rečenica oslobađa obveze pretpostavljanja da postoje entiteti označeni određenim opisima, tako nas, smatra Russell, supstitucijska teorija oslobađa pretpostavke da postoje stavačne funkcije, tj. svojstva ili atributi. Jednako se odnosi i na skupove.

Detalji supstitucijske teorije nisu nam ovdje važni. Dovoljno je napomenuti nekoliko stvari.

(1) Supstitucijska je teorija – kao, uostalom, i cikcak-teorija i teorija ograničenja veličine – teorija bez tipova (*type-free*), tj. teorija koja sadrži samo jednu vrstu varijabla, argumentima kojih može biti sve što jest, tj. sve što uopće može biti sastavnicom stavka. Drugim riječima, prisjetimo li se Russellova nazivlja iz *The Principles of Mathematics*, bilo koja "oznaka". Stajalište da logika (i time matematika) može imati samo jednu vrstu "istinskih" varijabla, vrijednosti kojih mogu biti bilo koji entiteti (bilo stvari bilo pojmovi), usko je povezano s Russellovim razumijevanjem logike kao potpuno *univerzalne* znanosti. Logika, prema Russellu, za razliku od drugih znanosti, nema neko ograničeno predmetno područje. Ništa što postoji ili što uopće može postojati ne leži izvan dohvata logike. Logičke su istine istinite jednako za Sokrata i Platona koliko i za broj dva i stavak "Sadašnji francuski kralj je ćelav". Dopušteno je, naravno, po potrebi definicijama uvoditi posebne vrste varijabla (npr. za brojeve ili za skupove), ali varijable koje se javljaju u rečenicama logike i matematike bez definicijskih pokrata kao svoje vrijednosti mogu uzimati bilo što:

> [U] svakome stavku čiste matematike, kada je u cijelosti izložen, varijable imaju apsolutno neograničeno područje (*field*): bilo koji pomišljiv (*conceivable*) entitet može se supstituirati za bilo koju od naših varijabla bez štete za istinitost našega stavka. [96, str. 7]

To Russellovo stajalište čini važan dio Russellove koncepcije logike iz vremena *Principles* i postat će kasnije poznato pod imenom 'nauk o neograničenoj varijabli' (*doctrine of the unrestricted variable*).[52] To je stajalište ujedno razlog zašto, posve neovisno o paradoksu stavaka,

[52] Što se točno tvrdi naukom o neograničenoj varijabli donekle je sporno. Nakon Heijenoortova utjecajna članka "Logic as Calculus and Logic as Language" [41] postalo je uobičajeno smatrati da nauk o neograničenoj varijabli povlači da logika mora sadržavati svoju metateoriju, ali Landini [61, str. 268-269] nauk smatra jednostavno sintaktičkim zahtjevom da svaka formalna logička teorija mora usvojiti samo jednu vrstu varijabla (individualne ili

Russell teoriju tipova opisanu u "Dodatku B", s njezinim parcijalno definiranim stavačnim funkcijama – tj. s varijablama ograničenima na određeno područje značenja – nije smatrao zadovoljavajućim rješenjem protuslovlja.[53] No, također, Russell niti nakon *Principles* – a, vidjet ćemo, možda čak niti u vrijeme pisanja *Principia Mathematica* – ne napušta nauk o neograničenoj varijabli. Supstitucijska teorija stoga za Russella ima očitu filozofijsku prednost spram teorije tipova.

(2) Mehanizam supstitucija vrši u supstitucijskoj teoriji ulogu vrlo sličnu onoj koju tipska hijerarhija vrši u nacrtu teorije tipova u *Principles*. Unatoč razlici u notaciji i pozadinskoj ontologiji, jake su paralele između dvije teorije. Što se u teoriji tipova postiže tipskom hijerarhijom, u supstitucijskoj se teoriji postiže različitim brojem supstitucija: visini tipova stavačnih funkcija odgovara broj uzastopnih supstitucija.

Rečeno se mora malo pojasniti. Stavačne funkcije, prema Russellovu nacrtu teorije tipova u *Principles*, imaju ograničeno područje značenja ili, drugim riječima, za neke vrijednosti varijabla stavačne funkcije nisu definirane. No kazati to isto je što i reći da varijable imaju ograničeno područje svojih mogućih vrijednosti: ne može bilo što biti vrijednost bilo koje varijable. Zanemarimo li ovdje Russellovu tvrdnju da su područja značenja nekih stavačnih funkcija zbrojevi nekoliko minimalnih tipova, teorija tipova u *Principles* odgovara onomu što se danas naziva 'jednostavnom teorijom tipova'. U jednostavnoj teoriji tipova neke varijable kao svoje moguće vrijednosti imaju sve i samo pojedinačnosti (entitete najnižega tipa u tipskoj hijerarhiji), neke sva i samo svojstva pojedinačnosti (ili, ekstenzionalno gledano, skupove pojedinačnosti), neke sve i samo relacije između dviju pojedinačnosti (ili, ekstenzionalno, skupove uređenih parova pojedinačnosti), neke pak sva i samo svojstva svojstava pojedinačnosti (ili skupove skupova pojedinačnosti) itd. Radi jednostavnosti zanemarimo relacije i, kako je danas uobičajeno u izlagaju jednostavne teorije tipova, označimo kojemu tipu varijabla pripada – tj. koje su njezine moguće vrijednosti – gornjim pokazateljem na varijabli. Tako, neka su x^0, y^0, ... varijable koje kao svoje vrijednosti imaju pojedinačnosti; $x^{\langle 0\rangle}, y^{\langle 0\rangle}$, ... varijable koje kao vrijednosti imaju svojstva pojedinačnosti (skupove); $x^{\langle\langle 0\rangle\rangle}, y^{\langle\langle 0\rangle\rangle}$, ... one pak kojih su moguće vrijednosti svojstva svojstava pojedinačnosti (skupovi skupova) itd. Formula $x^{\langle 0\rangle}x^0$ tada kaže da pojedinačnost x^0 ima svojstvo $x^{\langle 0\rangle}$. Razumijemo li $x^{\langle 0\rangle}$ radije kao skup nego kao atribut, i promijenimo li malo

entitetske varijable) i upozorava da je "važno ne pomiješati Russellov sintaktički nauk o neograničenoj varijabli sa semantičkim pitanjima koja se tiču dopustivoga područja varijabla."

[53] Vidi npr. Goldfarb [34, str. 35].

notaciju, $x^0 \in x^{\langle 0 \rangle}$ kaže da je pojedinačnost x^0 član skupa pojedinačnosti $x^{\langle 0 \rangle}$. Paradoksi su izbjegnuti time što izrazi poput $x^{\langle 0 \rangle} x^{\langle 0 \rangle}$ ili $x^{\langle 0 \rangle} \in x^{\langle 0 \rangle}$, kojima bi se kazalo da se svojstvo pririče samome sebi ili da je skup sam svoj član, nisu gramatički dopušteni, nisu formule.

Gramatički uklonivši mogućnost problematičnih formula, svaki izraz koji jest formula u jednostavnoj teoriji tipova specificira neko svojstvo ili skup. To jest, za svaku formulu ϕ postoji neko svojstvo koje pripada svim i samo onim entitetima koji zadovoljavaju tu formulu. Ili, analogno, za svaku formulu ϕ postoji neki skup čiji su elementi svi i samo oni entiteti koji zadovoljavaju tu formulu. Tu tvrdnju možemo izraziti odgovarajućom aksiomatskom shemom sadržaja:

$$\exists y^{\langle t \rangle} \forall x^t (y^{\langle t \rangle} x^t \leftrightarrow \phi)$$

Za formulu $x^0 = x^0$, na primjer, tako imamo aksiom prema kojemu postoji svojstvo koje pripada pojedinačnosti ako i samo ako je pojedinačnost istovjetna samoj sebi ili, analogno, aksiom prema kojemu postoji skup svih sebi istovjetnih pojedinačnosti:

$$\exists y^{\langle 0 \rangle} \forall x^0 (y^{\langle 0 \rangle} x^0 \leftrightarrow x^0 = x^0)$$

U supstitucijskoj teoriji, kako smo kazali, ne pretpostavljamo opstojnost niti atributā (tj. svojstava i relacija) niti skupova. No, naravno, da bi teorija uopće bila logička teorija i da bi se u njoj mogle formulirati matematičke tvrdnje, rečenice kojima se (naizgled) pririču svojstva entitetima ili tvrdi da su ti i ti entiteti elementi nekoga skupa morale bi se moći parafrazirati unutar teorije, čuvajući njihovu istinitost. U supstitucijskoj teoriji odgovarajuća je parafraza:

$$\exists p \exists a \forall x (p/a; x \leftrightarrow x = x)$$

Sve varijable u gornjoj formuli istoga su "tipa", tj. sve su neograničene, entitetske varijable. Izraz '$p/a; x$' određeni je opis za entitet koji je upravo kao entitet p, osim što sadrži x gdje god p sadrži a. Ako je p stavak, a a njegova sastavnica, $p/a; x$ je stavak dobiven supstitucijom x-a za a. No, kao određeni opis, '$p/a; x$' nestaje u analizi i sam po sebi ne označava ništa. Izraz 'p/a' možemo shvatiti kao izraz za stavak p čija je sastavnica a, ali kako i p i a mogu biti proizvoljni predmeti – recimo Sokrat i broj dva – 'p/a' ne mora označavati ništa: Sokrat nije vrsta stvari koja ima sastavnice, a posebno ne brojeve. Stoga izraz 'p/a' nije ime, sam po sebi ne označava nikakav predmet, tj. nema značenje izvan konteksta u kojem se javlja.

Drugim riječima, 'p/a' je nepotpun simbol. Izraze poput 'p/a' naziva Russell 'matricama', entitet p naziva 'prototipom', a entitet a 'argumentom matrice'. Imajući rečeno na umu, gornja formula kaže da postoje entiteti p i a takvi da, za svaki entitet x, supstitucija x-a na mjesto entiteta a daje stavak $x = x$. Na primjer, p može biti stavak "Sokrat = Sokrat", a a Sokrat. Stavačne funkcije tipa $\langle 0 \rangle$ zamijenjene su tako u supstitucijskoj teoriji matricama oblika 'p/a', a priricanje svojstava tipa $\langle 0 \rangle$ supstitucijom. Umjesto tvrdnje da postoji taj i taj atribut ili skup, tj. entitet višega tipa od tipa pojedinačnosti, imamo u supstitucijskoj teoriji tvrdnju koja govori samo o stavcima, entitetima općenito i operaciji supstitucije.

Pogledajmo sada kako se supstitucijskom teorijom parafraziraju iskazi jednostavne teorije tipova koji sadrže izraze koji referiraju na entitete viših tipova, npr. svojstva svojstava. Prema aksiomatskoj shemi sadržaja, sljedeći je iskaz aksiom teorije tipova:

$$\exists y^{\langle\langle 0\rangle\rangle} \forall x^{\langle 0\rangle} (y^{\langle\langle 0\rangle\rangle} x^{\langle 0\rangle} \leftrightarrow x^{\langle 0\rangle} = x^{\langle 0\rangle})$$

Taj nam iskaz kaže da postoji svojstvo koje pripada svojstvu pojedinačnosti ako i samo ako je svojstvo pojedinačnosti istovjetno samomu sebi. Odnosno, u ekstenzionalnom čitanju, da postoji skup svih samoistovjetnih skupova pojedinačnosti. Odgovarajući iskaz u supstitucijskoj teoriji je sljedeći:

$$\exists q \exists p \exists a \forall x \forall y (q/p, a; x, y \leftrightarrow x/y = x/y)$$

Slično kao i u prethodnom primjeru, sve varijable imaju neograničeno područje i sve što postoji može biti njihova vrijednost, '$q/p, a; x, y$' je određeni opis, a '$q/p, a$' i 'x/y' su matrice. Izraz '$q/p, a; x, y$', prema definiciji, opis je entiteta koji nastaje kao rezultat dviju uzastopnih supstitucija, tj. supstitucijom entitetā x i y na mjesto entitetā p i a u entitetu q. Stavačne funkcije tipa $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ zamijenjene su tako u supstitucijskoj teoriji matricama oblika '$q/p, a$', a priricanje svojstava tipa $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ dvama uzastopnim supstitucijama. Analognu stvar imamo i u slučajevima viših tipova: kako se penjemo u tipskoj hijerarhiji, raste broj supstitucija, a stavačne funkcije zamjenjuju se sve složenijim matricama.[54]

[54]Kako nas ovdje ne zanimaju detalji supstitucijske teorije, neke smo stvari malo pojednostavili. Broj supstitucija, tj. broj argumenata u matrici, nije povezan samo s visinom u tipskoj hijerarhiji, već i s mjesnošću tipova: matrice oblika '$q/p, a$' u supstitucijskoj teoriji vrše ne samo ulogu varijabla tipa $\langle\langle 0 \rangle\rangle$ već i onih tipa $\langle 0, 0 \rangle$. Također, važna je razlika što logički poveznici u supstitucijskoj teoriji *nisu* istinitosno-funkcijski. Russell kao primitivan simbol rabi '$\supset$', ali on, kao ni definirani poveznici (npr. '$\equiv$' i '&'), ne povezuje formule, već oznake! Vidi npr. Landini [61, str. 269-270].

Mehanizam supstitucija na taj način zamjenjuje ili simulira tipsku hijerarhiju: svaka formula jezika jednostavne teorije tipova može se prevesti u jezik supstitucijske teorije, a za svaki teorem jednostavne teorije tipova postoji odgovarajući teorem u supstitucijskoj teoriji.[55] Supstitucijska teorija pritom također uspješno simulira gramatička ograničenja teorije tipova koja sprječavaju izvođene Russellova i srodnih paradoksa. Kao što npr. izraz '$x^{\langle 0 \rangle} x^{\langle 0 \rangle}$' nije formula teorije tipova, tako i odgovarajući izraz u jeziku supstitucijske teorije, '$p/a; (p/a)!q$', krši njezina tvorbena pravila.

Vidimo, dakle, da su, unatoč znatnoj notacijskoj i metafizičkoj razlici, supstitucijska teorija i teorija tipova iz *Principles* usko povezane. Supstitucijska je teorija svojevrsna netipska (*type-free*) rekonstrukcija teorije tipova, koja, ne odstupajući od nauka o neograničenoj varijabli, uspješno imitira način izbjegavanja Russellova i srodnih paradoksa u teoriji tipova, zadržavajući pritom svu njezinu ekspresivnu snagu. U "Les paradoxes de la logique", objavljenome 1906. tijekom rada na supstitucijskoj teoriji kao odgovor na Poincaréovu kritiku logicizma, Russell i eksplicitno povezuje dvije teorije:

> *Tehnički*, teorija tipova kako je sugerirana u Dodatku B malo se razlikuje od teorije bez razreda. Jedina stvar koja me u to vrijeme navela zadržati razrede bila je tehnička teškoća iskazivanja stavaka elementarne aritmetike bez njih – teškoća koja mi se tada činila nepremostivom. [101, str. 193]

Opisana srodnost supstitucijske teorije i teorije tipova objašnjava ujedno zašto Russell u "On some Difficulties" nije smatrao potrebnim predložiti teoriju tipova kao jedno od mogućih rješenja paradoksā.

(3) Iako je supstitucijska teorija eliminativistička teorija – u smislu da čini suvišnom pretpostavku da postoje stavačne funkcije i skupovi kao posebne vrste entitetā – Russell je i dalje realist u pogledu intenzionalnih entiteta. Pozadinska metafizika supstitucijske teorije nije nominalistička. Supstitucijska teorija jednostavno izbjegava pretpostavku da je svaka nominalizirana otvorena formula ime nekoga priroka ili relacije (u Russellovu smislu, kao intenzionalnih entiteta) ili, općenitije, da za svaku otvorenu formulu postoji neki prirok ili relacija koji je oprimjeren upravo onim entitetima koji zadovoljavaju formulu. Jednako tako, naravno, supstitucijska teorija ne pretpostavlja da svaka otvorena formula definira skup ili relaciju-u-ekstenziji (kao skup uređenih n-toraka). Međutim, Russell *nije* u međuvremenu promijenio svoje staja-

[55] Za opis odnosa između teorije tipova i supstitucijske teorije vidi Landini [59, str. 140-145] i [60, str. 262-266].

lište prema stavcima: stavci su i dalje složeni entiteti kojih su sastavnice ono što u *Principles* naziva pojmovima (tj. prirocima i relacijama). Također, pojmovi su, pa samim tim i stavci koji ih sadrže, i dalje intenzinalni entiteti – koekstenzionalnost ne povlači istovjetnost pojmova, a ekvivalentnost ne povlači istovjetnost stavaka. Razlika supstitucijske spram jednostavne teorije tipova u tome je što su priroci, relacije, stavci i stvari, uopće sve što jest, vrijednosti jedne te iste vrste varijabli – neograničenih entitetskih ili *individualnih* varijabli:

> [Supstitucijska teorija] omogućuje ono što se barem čini kao da je potpuno rješenje svih prastarih teškoća o jednome i mnogome (*the one and the many*); jer dok dopušta da postoje mnoga bića, prianja krajnjom sitničavošću uz staru maksimu da "što god jest, jedno je". [100, str. 189]

U supstitucijskoj teoriji nema hijerarhije entitetā i nema stavačnih funkcija (u ontologijski jakom smislu), ali intenzionalni entiteti, pojmovi i stavci, ostaju punopravni članovi njezine ontologije.

(4) Supstitucijska je teorija nesuvisla (nekonzistentna). Russell je isprva namjeravao supstitucijsku teoriju učiniti središnjom temom planiranoga drugoga sveska *The Principles of Mathematics*,[56] pri čemu je teorija trebala ponuditi rješenje protuslovljā analiziranih u prvom dijelu i biti osnova logicističkoga utemeljenja matematike. Međutim, pokazalo se, baš kao i u "Dodatku B", da stavci nisu ništa manje problematična vrsta entiteta od stavačnih funkcija i skupova.

Stavci, uključujući opće stavke, punopravni su entiteti supstitucijske teorije. Stavci su intenzionalni entiteti, tj. ekvivalentni stavci nisu nužno istovjetni. Razlog je, kao i prije, to što su stavci složeni entiteti koji među svojim sastavnicama imaju intenzionalne entitete (pojmove) pa ekvivalentni stavci mogu sadržavati *različite* entitete (koekstenzivne, no neistovjetne pojmove) i samim tim biti međusobno različiti. Također, svi su stavci, kao i u *Principles*, istoga tipa – *svi* entiteti istoga su tipa. Stavačne funkcije ne postoje, ali svaka je stavačna funkcija teorije tipova oponašana parom entitetā p i a, odnosno matricom 'p/a'. No to znači da pretpostavke koje su u *Principles* vodile do paradoksa stavaka nisu bitno promijenjene supstitucijskom teorijom, što otvara pitanje je li u supstitucijskoj teoriji također izvedljivo protuslovlje poput onoga u "Dodatku B"? I, doista, paradoks srodan paradoksu stavaka iz "Dodatka B" može se reproducirati u supstitucijskoj teoriji.[57]

[56] Vidi Landini [59, str. v-vi].

[57] Cocchiarella [15] je prvi, čini se, koji je primijetio da je supstitucijska teorija nekonzistentna s Cantorovim poučkom o partitivnom skupu i da se stoga u supstitucijskoj teoriji dijagonalizacijom mogu izvesti paradoksi poput paradoksa stavaka.

Opišimo neformalno paradoks stavaka u supstitucijskoj teoriji. Najprije, može se pokazati da broj entiteta postuliranih supstitucijskom teorijom nije konačan. Posebno, broj stavaka nije konačan. S obzirom da se među entitetima nalaze pojmovi, taj je rezultat očekivan. No tada je broj parova entiteta jednakobrojan broju stavaka pa stoga između "stavačnih funkcija" – tj. proizvoljnih parova entitetā p i a – i samih stavaka imamo korelaciju jedan na jedan. Jednostavno je sada dijagonalizacijom izvesti protuslovlje. Neka je f takva korelacija. Ako $f(\langle p, a \rangle) = q$, supstitucijom stavka q na mjesto entiteta a u p u nekim slučajevima možemo dobiti istinit stavak, u ostalim slučajevima ne. Prevevši to u govor o stavačnim funkcijama, stavačna funkcija sebi koreliranomu stavku kao argumentu može u nekim slučajevima pridružiti istinit stavak, u drugim slučajevima ne. Uzmimo sada par entiteta p_0 i a_0, takvih da supstitucijom na mjesto entiteta a_0 dobijemo istinite stavke za sve i samo one stavke q, korelirane s parom $\langle p, a \rangle$, koji supstituirani na mjesto a ne daju istinit stavak. U prijevodu, uzmimo stavačnu funkciju takvu da pridružuje istinit stavak upravo onim stavcima (kao svojim argumentima) kojima stavačna funkcija s kojom su korelirani ne pridružuje istinit stavak. Taj par entitetā p_0 i a_0 također je koreliran s nekim stavkom q^*, tj. $f(\langle p_0, a_0 \rangle) = q^*$. Lako je sada vidjeti da suptitucija stavka q^* na mjesto entiteta a_0 rezultira istinitim stavkom ako i samo ako nije tako da suptitucija stavka q^* na mjesto entiteta a_0 rezultira istinitim stavkom. Taj je paradoks danas poznat pod imenom 'p_0/a_0 paradoks'.[58]

Nakon otkrića paradoksa, Russell odlučuje ne objaviti članak "On the Substitutional Theory of Classes and Relations", ali ne napušta odmah supstitucijsku teoriju. Naprotiv, nada se da može izbjeći paradoks i sačuvati teoriju "čisteći ju od metafizičkih elemenata".[59] U Russellovim rukopisima sačuvano je nekoliko pokušaja rješenja.[60] Između ostaloga, Russell predlaže razlikovanje stavaka od entitetā i time stavačnu od ne-stavačne supstitucije, tako da bi se, prema prijedlogu, stavci mogli smisleno supstituirati samo stavcima, a entiteti samo entitetima. Ubrzo primjećuje, međutim, da puko razlikovanje stavaka od entitetā nije dovoljno za izbjeći paradoks. Rješenje bi, zaključuje na kraju, moralo uključiti nešto poput hijerarhije stavaka, pri čemu se stavci na jednoj razini hijerarhije (tj. stavci određenoga *reda*) ne bi mogli smisleno supstituirati

[58]Preciznije govoreći, dvije se različite, iako međusobno srodne, vrste paradoksa stavaka mogu izvesti u supstitucijskoj teoriji, p_0/a_0 paradoks i paradoks koji je bliži izvornomu paradoksu stavaka u *Principles*, ali za opis razlike među njima morali bismo ući puno detaljnije u formalizam supstitucijske teorije nego što nam je za naše svrhe potrebno. Landini [59, str. 201-206] daje detaljan formalni izvod za obje vrste.

[59]Izraz je iz Russellova pisma Jourdainu od 10. listopada 1906. Vidi u Grattan-Guinness [36, str. 93].

[60]Landini [59, str. 206-212] analizira više Russellovih pokušaja između otkrića p_0/a_0 paradoksa i odgovora Poincaréu.

stavcima neke druge hijerarhijske razine – upravo ono rješenje koje je sugerirao na kraju "Dodatka B" i odbacio kao "grubo i jako umjetno". Rješenje, ujedno, koje će postati dio onoga što danas znamo kao Russellovu razgranatu teoriju tipova.

2.3.4 Dvije vrste paradoksā

Russell će razgranatom teorijom tipova u *Principia Mathematica* ponuditi jedinstvenu dijagnozu i jedinstveno rješenje paradoksā spomenutih na početku ovoga rada. Međutim, nakon Ramseyeve kritike razgranate teorije u slavnome članku "The Foundations of Mathematics" [83] iz 1926., postat će uobičajeno paradokse dijeliti u dvije odvojene grupe, logičko-matematičke s jedne i semantičke paradokse s druge strane. Logika i matematika morale bi moći blokirati samo paradokse prve vrste, smatra Ramsey, dok su oni druge vrste za logiku i matematiku irelevantni "ako pod 'logika' mislimo na formalni sustav, iako bi dakako bili relevantni za logiku u smislu analize misli." [83, str. 21] Njegova ocjena da je jednostavna teorija tipova dovoljna za nositi se s logičkim paradoksima i da stoga nema potrebe za razgranatom teorijom tipova postalo je, kako ćemo vidjeti, jedna od najutjecajnijih kritika Russellove zrele teorije tipova. S vremenom će se aksiomatska teorija skupova, radije nego jednostavna teorija tipova, prihvatiti kao standardni odgovor na logičke paradokse, a Tarskijeva hijerarhija jezikā kao odgovor na semantičke paradokse.[61]

Peano [70] je, čini se, prvi koji je povukao granicu između dvije vrste paradoksā, upravo u vrijeme Russellova rada na supstitucijskoj teoriji.[62] Teško je reći je li na Russella utjecala Peanova sugestija (i je li s njom upoznat već 1906.), ali zanimljiva je i slabije poznata činjenica da Russell u vrijeme rada na supstitucijskoj teoriji i sam doista razlikuje ne-logičke od logičkih

[61] Osnova je rješenja koje nudi Tarski razlikovanje između predmetnoga jezika i metajezika. Semantički izrazi pomoću kojih govorimo o izrazima nekoga jezika (npr. 'je istinito', 'znači' i sl.) ne mogu biti dio toga istoga jezika: rečenice koje govore o nekome danome jeziku nisu rečenice toga jezika, već njegova metajezika. Tarski je svoju teoriju istinitosti za formalne jezike izgradio već krajem dvadesetih godina 20. stoljeća (vidi podrubnicu 1 u [118, str. 154]), no njezin utjecaj raste nakon objavljivanja "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" [116], proširenoga njemačkoga prijevoda posljskoga izvornika [115], i, posebno, nakon imigracije u Sjedinjene Države. Engleski prijevod, "The Concept of Truth in Formalized Languages" [118], objavljen je 1956. Neformalan prikaz osnovnih ideja svoje teorije Tarski daje u članku "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of semantics" [117]. Posljednjih desetljeća, kao alternativa rješenju Tarskoga, široko se prihvatila utjecajna Kripkeova teorija [54].

[62] Prema Peanu [70, str. 218], problem s paradoksima poput Richardova leži u tome što su djelomično formulirani u "simbolima", tj. formalnome jeziku, a djelomično neformalno, zbog čega "sadrže ideje 'običnoga jezika', ideje koje su nam vrlo poznate, ali neodređene i uzrok svake višeznačnosti." Paradoksi poput Richardova stoga ne pripadaju matematici, već lingvistici. Ramsey [83, str. 21] citira Peanovu ocjenu da Richardov paradoks ne pripada matematici, već lingvistici, no napominje da je sklon nazvati epistemologijom ono što Peano naziva lingvistikom. Niti jedan niti drugi ne rabe zraz 'semantički' za opis ne-matematičkih paradoksā.

paradoksa i da za te dvije vrste paradoksa predlaže *različita* rješenja. U "On Some Difficulties", vidjeli smo, Russell razmatra samo paradokse teorije skupova, ali u "On the Substitutional Theory" i "Les paradoxes" jasno povlači razliku između logičkih i ne-logičkih paradoksa. Teorija supstitucije trebala je ponuditi rješenje paradoksā prve vrste; rješenje za one druge vrste leži, anticipirajući Tarskijevo rješenje, u svojevrsnoj hijerarhiji jezikā. Analizirajući König-Dixonov paradoks najmanjega nedefinirljivoga rednoga broja, Russell piše:

> [T]aj se redni broj čini definiranim kao 'neposredni sljedbenik rednih brojeva koji su definirljivi'. Na prvi pogled to izgleda kao protuslovlje, ali zapravo nije. Jer iako svaki pojedini broj manji od njega jest definirljiv, cijeli razred njih nije definirljiv. *Čini* se definiranim kao 'razred definirljivih rednih brojeva': ali *definirljivo* je relativno spram nekoga danoga skupa temeljnih pojmova, i ako nazovemo taj skup temeljnih pojmova I, 'definirljivo u terminima I' nikada nije i sámo definirljivo u terminima I. [...] Lako je definirati 'definirljivo u terminima I' pomoću većega pojmovnoga aparata I^*, ali tada će 'definirljivo u terminima I^*' tražiti još veći pojmovni aparat I^{**} za svoju definiciju, i tako dalje. [...] Stoga je paradoks najmanjega nedefinirljivoga rednoga broja samo prividan. [100, str.185]

Slično, naravno, vrijedi i za Richardov, Berryjev i srodne paradokse. Russellova je analiza jasna. Pojmovi definicije, označavanja, imenovanja i sl. nisu jednoznačni, već su relativni spram nekoga danoga jezika. Za svaki dani jezik L, izrazi poput 'definirljivo u L', 'imenovano u L' i sl. nisu dio jezika L, već nekoga drugoga jezika L' (danas bismo kazali 'metajezika') unutar kojega referiramo na i kvantificiramo nad izrazima jezika L. Čak i ako bismo izraz 'definirljivo u L' jednostavno izravno dodali u rječnik jezika L, dobili bismo time prošireni jezik L^*, unutar kojega možemo govoriti o svim entitetima neke vrste definirljivima u L, ali unutar kojega ne bismo mogli definirati izraz 'definirljivo u L^*'.

Definicija, na primjer, koja bi sadržavala izraze poput 'sve definicije u L' sama ne bi bila dio jezika L i time ne bi bila jedna od tih *svih* definicija u L. Rečeno možemo također opisati na sljedeći način, važnost kojega će postati jasnija kada ćemo raspravljati o načelu poročnoga kruga i interpretaciji Russellove razgranate teorije tipova: ako neka definicija uključuje ili pretpostavlja pokoličavanje nad *svim* članovima nekoga skupa definicija, ta *definicija* ne može i sama biti dio toga skupa.

Paradoks lažljivca razlikuje se od spomenutih paradoksa (tj. Berryjeva, Richardova i König-

Dixonova) time što, barem na prvi pogled, njegova formulacija ne uključuje pokoličavanje nad nekim skupom izraza (definicija ili imena) i stoga se čini da bi odgovor na nj morao biti različit. Doista, Russellov odgovor na paradoks nije razlikovanje jezikā:

> Želimo li kazati nešto ekvivalentno s "Činim neistinit iskaz (*statement*) koji sadrži n vezanih varijabli", moramo kazati nešto poput: "Postoji stavačna funkcija $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ takva da tvrdim da je $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ istinito za svaku vrijednost od $x_1, x_2, ..., x_n$, a to je zapravo neistinito." Taj iskaz sadrži $n+1$ vezanih varijabli, naime $x_1, x_2, ..., x_n$ i φ. Stoga se on ne odnosi na sebe sama. [101, str. 208]

Čini se da Russell tu tvrdi da izrazi poput 'ovaj iskaz', 'ova rečenica' i sl. ne uspijevaju izravno referirati na iskaze i rečenice koji ih sadrže: za referirati na iskaz, potrebno je također navesti broj vezanih varijabli u tome iskazu.[63] Međutim, svaki iskaz kojim bi se specificirao neki dani iskaz sadržavat će, prema Russellu, veći broj vezanih varijabla od iskaza koji se specificira i stoga će ta dva iskaza nužno biti različita. Nijedan iskaz stoga ne uspijeva referirati na sebe sama i paradoks nestaje. Jednako, dakako, vrijedi za rečenice i sl.

Je li Russellova analiza paradoksa lažljivca zadovoljavajuća nije nam za sada važno. Primijetimo samo da, slično kao i u slučaju gore citiranoga Russellova odgovora na König-Dixonov paradoks, iskaz kojim se specificira dani iskaz doista *uključuje* pokoličavanje nad svim članovima nekoga skupa iskaza ("Postoji stavačna funkcija $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ takva da..."), makar se u ovom slučaju skup sastoji od svega jednoga člana, i da iskaz koji uključuje ili pretpostavlja to pokoličavanje sam ne može biti dio toga skupa, tj. ne može biti istovjetan njegovu jedinomu članu.

Vidimo, dakle, da Russell u vrijeme rada na supstitucijskoj teoriji i sam razlikuje ono što će se kasnije nazvati logičkim i semantičkim paradoksima i da *ne* pretpostavlja da te dvije skupine paradoksa moraju imati isto rješenje. Štoviše, nudi različite odgovore na te dvije vrste paradoksa: supstitucijsku teoriju kao rješenje logičkih i (implicitno) načelo prema kojem iskazi, rečenice, definicije i sl. koje sadrže pokoličavanje nad svim članovima nekoga skupa (iskaza, rečenica, definicija) ne mogu i sami biti članovi toga istoga skupa.

Nekoliko mjeseci nakon otkrića p_0/a_0 paradoksa, ne uspijevajući naći zadovoljavajuće rješenje, Russell će napustiti supstitucijsku teoriju kako ju je razvio u "On the Substitutional Theory". Važno je tu napomenuti da je p_0/a_0 paradoks, iako sam ga u prethodnom odsječku ne-

[63]Možda i više od toga, npr. specificirati priročne izraze. Vidi Landini [61, str. 278].

formalno opisao rabeći izraze poput ‘istinit stavak’, u punom smislu *logički*, a ne semantički paradoks. U tadašnjoj Russellovoj ontologiji, kazati da je stavak istinit jednostavno znači kazati da stavak, tj. određeni složeni entitet, postoji (*exists*) ili stoji (*obtains*).[64] Stavci nisu reprezentacije činjenica, već činjenice same. Semantički izrazi poput ‘istinito’, ‘definirano’, ‘imenovano’ i sl. nisu dio jezika supstitucijske teorije niti formalnoga izvoda p_0/a_0 paradoksa.[65] Napuštanjem svoje rane inačice supstitucijske teorije, i time odgovora na logičke paradokse, rješenje koje isprva daje samo za ne-logičke paradokse Russell odlučuje primijeniti i na logičke. To je rješenje upravo ono što će u *Principia* nazvati načelom poročnoga kruga, kršenje kojega će dijagnosticirati kao izvor svih paradoksa – i logičkih i semantičkih.

Sugerira to, vidjet ćemo, određeno “nominalističko” tumačenje razgranate teorije tipova, tj. interpretaciju prema kojoj su ono što u *Principia Mathematica* naziva stavcima i stavačnim funkcijama tek jezični izrazi. Naime, Russellov odgovor na semantičke paradokse u vrijeme njegove supstitucijske teorije, za razliku od predloženoga rješenja logičkih paradoksa, pretpostavlja da su semantički paradoksi prije svega stvar jezika – definicija, iskaza, rečenica i sl. Kako razumjeti primjenu toga rješenja – ili, u svakom slučaju, vrlo sličnoga rješenja – na logičke paradokse? Već supstitucijskom teorijom Russell napušta pretpostavku da postoje stavačne funkcije u ontologijski jakome smislu (tj. kao svojstva ili atributi), a nakon otkrića p_0/a_0 paradoksa razmatra kao moguće rješenje da niti stavci nisu entiteti. Doista, u *Principia* napušta konačno Russell ontologiju stavaka kao o umu neovisnih složenih entiteta i usvaja tzv. teoriju višestrukih relacija, prema kojoj su stavci, baš kao i stavačne funkcije i skupovi u supstitucijskoj teoriji, tek nepotpuni simboli.

2.3.5 Načelo poročnoga kruga

U vrijeme dok Russell još razmatra različite moguće pristupe uklanjanju protuslovljā – cikcak-teoriju, teoriju ograničenja veličine i teoriju bez razreda – Henri Poincaré, jedan od najznačajnijih matematičara svojega vremena, objavljuje prvi dio eseja “Les mathématiques et la logique” [73] u kojemu kritizira i aksiomatski i logicistički pristup matematici, uključujući Russellova stajališta iznesena u *Principles*, i brani svojevrstan kantovski pogled na matematiku, prema kojemu je matematika utemeljena u apriornim matematičkim intuicijama i stoga nesvedljiva na

[64] Prisjetimo se da ‘postoji’ i ‘jest’ za Russella u to vrijeme nisu istoznačnice: i neistiniti stavci, tj. složeni entiteti koji *ne* postoje, također jesu, imaju bitak, entiteti su ili oznake.

[65] Vidi npr. Landini [59, str. 205] i [61, str. 273-274].

logiku. Drugi dio objavljuje nakon Russellova "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types" i u njemu se osvrće i na ondje iznesene Russellove poglede. Poincaré kao izvor paradoksā vidi prihvaćanje cantorovske aktualne beskonačnosti, koja, prema njemu, vodi do poročne cirkularnosti, a kao rješenje, na tragu Richardova [84] komentara o paradoksu koji danas nosi njegovo ime, predlaže tzv. načelo poročnoga kruga. Russell odgovara Poincaréu člankom "Les paradoxes de la logique".[66] Iako odbacuje Poincaréovu kritiku aktualne beskonačnosti, slaže se da rješenje paradoksā mora biti takvo da izbjegavava poročnu cirkularnost. Načelo poročnoga kruga postat će uskoro, u formulaciji razgranate teorije tipova, Russellov "službeni" odgovor na paradokse. Sažetak je to slavne rasprave između Russella i Poincaréa.[67]

Što je načelo poročnoga kruga? Richard [84] u kratkom tekstu u kojem formulira svoj paradoks ujedno predlaže rješenje. Opišimo malo detaljnije kako glasi Richardov paradoks. Broj znakova abecede (npr. hrvatskoga jezika), zajedno s razgodcima i bjelinom, konačan je i stoga je broj njihovih permutacija, tj. konačnih nizova znakova, prebrojiv. Postoji, dakle, bijekcija između skupa permutacija i skupa prirodnih brojeva – drugim riječima, permutacije se mogu poredati u niz kao prva, druga, treća itd. Neke od tih permutacija znakova definiraju brojeve, neke ne. Uklonimo iz niza sve one koje ne definiraju brojeve. Dobivamo time niz svih permutacija koje definiraju brojeve. Odnosno, dobivamo uređeni skup svih *brojeva* koji su definirani konačnim brojem znakova abecede. Nazovimo taj skup 'E'. Richard [84, str. 143] definira broj N na sljedeći način: "Neka je p znamenka na n-tome mjestu n-toga broja u skupu E; formirajmo broj koji ima 0 za svoj cijeli dio i, na svojemu n-tome decimalnome mjestu, $p + 1$ ako p nije 8 ili 9, a inače 1."[68] Nazovimo niz znakova koji tvore Richardovu definiciju, tj. niz

[66]Članak je objavljen u rujnu 1906., a rukopis na engleskome, naslovljen "On 'Insolubilia' and Their Solution by Symbolic Logic", napisan je u lipnju 1906. Rukopis je objavljen u [99] i prema njemu su prevedeni svi odlomci iz "Les paradoxes" u ovom radu.

[67]Cantini [6, str. 889] kao dio debate Russella i Poincaréa uključuje također Russellov članak "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" [89], u kojemu je prvi put objavljena formulacija razgranate teorije tipova, zajedno s Russellovom analizom paradoksā u terminima načela poročnoga kruga, te nekoliko kraćih Poincaréovih tekstova objavljenih između 1909. i 1912. ([74], [75] i [76]). Zanimljivo, ne spominje Russellov "La théorie des types logiques" [90] iz 1910. Na istoj se stranici provuklo nekoliko pogješaka. Tako je Russellov tekst u kojemu prvi put predlaže teoriju bez razredā kao moguće rješenje paradoksā krivo naslovljen kao "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and aggregates" i napisano (u podrubnici 18) da je članak reakcija na Hobsonov "On the arithmetic continuum" [44]. No taj je Hobsonov članak zaprimljen 9. studenoga 1905., svega 15 dana prije Russellova, i objavljen neposredno ispred njega u istome broju *Proceedings of the London Mathematical Society*. U popisu literature ispravno je navedeno da se radi o "On the General Theory of Transfinite Numbers and Order Types" [43]. "On the Arithmetic Continuum" spominje Russell u podrubnici "Mathematical Logic" [89, str. 223], kazavši samo da mu se ondje predloženo rješenje König-Dixonova paradoksa ne čini primjerenim.

[68]Richardova definicija očito ne razlikuje pažljivo između brojeva i znamenki, ali nije ju veliki problem preciznije parafrazirati.

znakova između navodnika u prethodnoj rečenici, 'G'. Naizgled smo dobili protuslovlje: zbog načina konstrukcije, broj N nije u E, no zbog toga što je niz G i sam jedna od permutacija koje definiraju brojeve, N jest u E.

Prema Richardu, protuslovlje je samo prividno: permutacija G *ne* definira broj jer G zapravo nema značenje. G spominje skup E koji još nije definiran. Da bi G imao značenje, E mora biti u potpunosti definiran, a to je nemoguće osim pomoću beskonačno mnogo riječi. G je stoga među onim permutacijama koje su uklonjene iz niza svih permutacija. No zašto E može biti definiran samo pomoću beskonačno mnogo riječi? Zato jer, da bi E bio potpuno definiran, moraju prethodno *svi* njegovi članovi biti definirani; no iako svaki njegov član jest definiran s konačno mnogo riječi, kako je njih beskonačno mnogo, E sam ne može se definirati pomoću konačno mnogo riječi. Uočimo sličnost s Russellovom analizom König-Dixonova paradoksa citiranu nekoliko stranica prije: iako je svaki član skupa E definirljiv pomoću konačnoga broja znakova ("temeljnih pojmova"), cijeli skup E nije. Kao posljedica Richardove analize slijedi da G, referirajući na sve permutacije koje definiraju broj, sam nije jedan od članova skupa tih permutacija.

Poincaré prihvaća Richardovu analizu i smatra da se može primijeniti na paradokse općenito: bilo što što se odnosi na (ili referira na, ili uključuje, ili pretpostavlja) svaki član nekoga skupa, ne može i samo biti jedan od članova toga skupa. To je načelo poročnoga kruga. Ili, kako parafrazira Russell [101, str. 204]: "Što god uključuje (*involves*) vezanu varijablu, ne smije biti među mogućim vrijednostima te varijable." Russell je, vidjeli smo, to načelo – ili barem nešto vrlo slično njemu – već u "On the Substitutional Theory" prihvatio kao odgovor na semantičke paradokse. Koji su razlozi za Russellovo prihvaćanje načela poročnoga kruga kao rješenja za paradokse općenito? Jedan mogući odgovor sugerirao sam u prethodnome odsječku. Prije nego taj odgovor malo detaljnije obrazložim, važno nam je primijetiti nekoliko stvari.

U vrijeme pisanja "Les paradoxes" Russell još uvijek radi na supstitucijskoj teoriji i, štoviše, tu teoriju u članku brani kao odgovor na paradokse. Iako ne spominje p_0/a_0 paradoks, već mjesecima prije pisanja članka iskušava nekoliko mogućih odgovora na nj.[69] Zaključuje na kraju da je za izbjegavanje paradoksa potrebno, na ovaj ili onaj način, razdijeliti stavke u različite tipove – u smislu da se stavci jednoga tipa ne mogu supstituirati za stavke različitoga tipa. S tim se izborom već bio susreo u prvom nacrtu teorije tipova na kraju *Principles of Mathematics* i od-

[69]Landini [61, str. 274] smatra da je razlog što Russell ne spominje paradoks to što njegova formulacija ovisi o tehničkim detaljima supstitucijske teorije za koje nije mogao očekivati da su čitateljima poznate.

bacio ga. Naime, problem je s tim rješenjem što ono protuslovi nauku o neograničenoj varijabli, koji je u samom središtu Russellove koncepcije logike kao univerzalne znanosti. Filozofijska prednost supstitucijske teorije spram teorije tipova upravo je to što supstitucijska teorija ima samo jednu vrstu varijabli, vrijednost kojih može biti bilo što što jest – bilo stvari, bilo pojmovi, bilo stavci. Razdijeliti stavke u različite tipove (npr. prema redovima ili prema broju količitelja u izrazima koji stoje za stavke) i zanijekati da se stavci jednoga tipa mogu supstituirati stavcima nekoga drugoga tipa značilo bi uvesti više vrsta varijabli, svaku s nekim ograničenim područjem mogućih vrijednosti.

Posve analogan problem predstavljale su u teoriji tipova stavačne funkcije i skupovi. Radi izbjegavanja protuslovlja, stavačne su funkcije u teoriji tipova podijeljene prema tipovima ("područjima značenja"), tj. prema vrsti entiteta koji mogu biti njezini argumenti, entitetima za koje je funkcija definirana. Skupovi su tipski podijeljeni prema vrsti entiteta koje imaju kao elemente. Drukčije rečeno, *varijable* su u teoriji tipova podijeljene prema svojim mogućim vrijednostima: neke varijable kao moguće vrijednosti imaju samo pojedinačnosti, neke samo skupove pojedinačnosti (ili stavačne funkcije čiji su argumenti samo pojedinačnosti), neke samo skupove skupova pojedinačnosti (ili stavačne funkcije čiji su argumenti samo one stavačne funkcije čiji su argumenti pojedinačnosti) itd. Neovisno o paradoksu stavaka, uvođenje više vrsta varijabla i time kršenje nauka o neograničenoj varijabli, vidjeli smo, za Russellov logicizam nije idealno rješenje. Kako Russell rješava taj problem? Russellov odgovor u supstitucijskoj teoriji bio je odbaciti pretpostavku da postoje takve stvari poput stavačnih funkcija i skupova. Preciznije, zanijekati da izrazi za stavačne funkcije i skupove imaju značenje sami po sebi, tj. da stoje za stavačne funkcije (shvaćene kao svojstva ili atribute) i skupove – izrazi za stavačne funkcije i skupove postali su nepotpuni simboli, koji sami po sebi ne označavaju ništa. Tipska se hijerarhija i dalje zadržala, u novoj notaciji simulirana različitim oblikom matrica i brojem supstitucija, ali ne kao hijerarhija *entitetā*! Svi su entiteti najnižega tipa, vrijednosti jedne vrste varijabli. Tipska je hijerarhija sada shvaćena jednostavno kao hijerarhija *izrazā*, dovoljna za izbjegavanje paradoksā teorije skupova, ali koja ne krši zahtjev da logika mora imati samo jednu vrstu istinskih varijabli, kojih je svaki entitet moguća vrijednost. Sličan odgovor daje sada Russell i na problem hijerarhije stavaka.

S jedne strane, izbjegavanje p_0/a_0 paradoksa zahtijeva određenu hijerarhiju stavaka. S druge strane, nauk o neograničenoj varijabli zahtijeva da su svi entiteti istoga tipa. Russell miri ta dva zahtjeva na sličan način kao i u slučaju stavačnih funkcija i skupova: eliminacijom entitetā višega tipa. Konkretno, u ovome slučaju, eliminacijom općih stavaka. U ranijoj inačici supstitucijske teorije u "On the Substitutional Theory", opći stavci, stavci kojih jezični izrazi sadrže količitelje, pravi su entiteti, opća stanja stvari. U "Les paradoxes" Russell napušta ontologiju općih stavaka. Samo elementarni stavci, poput npr. "Sokrat je smrtan", ostaju kao pravi entiteti; opći stavci, npr. "Svi ljudi su smrtni" – preciznije, jezični *izrazi* za koje je prethodno smatrao da stoje za opće stavke – sada su tek nepotpuni simboli, koji sami po sebi ne označavaju entitete.[70] Stoga sada Russell razlikuje između iskaza (*statements*) koji označavaju entitete (naime stavke) i iskaza koji sadrže količitelje, tj. vezane varijable. Govoreći o paradoksu lažljivca, tako kaže:

> [N]e postoji način za govor o iskazima *općenito*: možemo govoriti o iskazima stavaka, ili iskazima koji sadrže jednu, dvije, tri, ..., vezane varijable, ali ne o iskazima općenito. [88, str. 207]

Ne stoje, dakle, svi iskazi za stavke. Primijetimo ovdje da se tipovi iskazā ne razlikuju (samo) prema redu, tj. prema vrsti tipskih varijabla koje sadrže, već (također i) prema *broju* količiteljā, tj. vezanih varijabli. Razlog za to pojasnit ćemo kada ćemo govoriti o rekurzivnoj definiciji istinitosti i razgranatoj hijerarhiji u *Principia Mathematica*. Primijetimo također da razlikovanje iskaza prema broju vezanih varijabli objašnjava naizgled neobično inzistiranje na navođenju broja vezanih varijabli u Russellovu odgovoru na paradoks lažljivca citiranome u prethodnome odsječku.

Eliminacija općih stavaka Russellu omogućava usvajanje hijerarhije stavaka potrebnu za izbjegavanje p_0/a_0 paradoksa, ne odstupajući ujedno od nauka o neograničenoj varijabli. *Sve* što sadrži vezanu varijablu (bilo izraz koji naizgled stoji za stavak bilo za stavačnu funkciju bilo za skup) sada je samo izraz koji sam ne označava nikakav entitet, "puki *façon de parler*" [88, str. 206]. Za varijable viših tipova, čije su vrijednosti naizgled skupovi i stavačne funkcije, Russell je već pokazao kako se mogu notacijski ukloniti supstitucijskom teorijom i zamijeniti matricama. Ideja je sličnu stvar učiniti s općim stavcima.[71] Kao "istinske" varijable i dalje ostaju

[70] Russell je mogao imati i neovisan razlog za uklanjanje općih stavaka iz ontologije. Elementarne stavke nije problem shvatiti kao složene entitete i kazati, na primjer, da su sastavnice stavka "Sokrat je smrtan" Sokrat i pojam smrtnosti. No, nakon eliminacije označavajućih fraza poput 'svi ljudi', nije posve jasno što bi trebao biti podmet stavka "Svi ljudi su smrtni".

[71] Tehnički, glavna razlika između starije inačice supstitucijske teorije i novije, u kojoj više ne postoje opći stavci kao zasebni entiteti, u tome je što se sada formule koje sadrže količitelje više ne mogu nominalizirati, tj. ne može se jednostavno nekim prikladnim operatorom od pokoličenih formula proizvesti oznake. Nažalost, Russell u "Les paradoxes" ne otkriva na koji način namjerava preinačiti supstitucijsku teoriju jer, kako kaže, "da bi se pokazalo u detalje kako to učiniti zahtijevalo bi puno matematike i nemoguće je u ovome članku" [88, str. 206]. Landini [59, str. 216-220] na temelju $*9$ *Principia* pokušava formalno rekonstruirati Russellove ideje.

samo varijable najnižega tipa, a njihove su moguće vrijednosti i dalje sve što jest.

Vidimo sada na koji način Russell može prihvatiti Poincarévo načelo poročnoga kruga. Dijagnozu i rješenje vrlo slično Poincaréovu Russell je već prihvatio u analizi König-Dixonova i srodnih paradoksa, koje, kao i Peano, vidi kao problem jezika: definicija, pojmovnoga aparata i sl. Stoga se Russell može složiti da *izrazi* – definicije, iskazi, rečenice – koje sadrže pokoličavanje nad svim članovima nekoga skupa ne mogu i sami biti članovi toga skupa. Kada parafrazira načelo poročnoga kruga kazavši da ništa što uključuje vezanu varijablu ne može i samo biti vrijednost te varijable, Russell ne govori neprecizno niti nemarno, ne razlikujući dovoljno pažljivo *izraz* koji sadrži varijablu od onoga za što izraz stoji. Govori doista samo o izrazima. No izrazi za koje bismo "naivno" smatrali da označavaju skupove, stavačne funkcije i opće stavke za Russella su sada samo izrazi koji sadrže vezanu varijablu, nepotpuni simboli – nema ničega za što ti izrazi stoje! Kako će kasnije primijetiti mnogi komentatori, kazati da nijedan skup S, na primjer, ne može biti član skupa nad kojim smo kvantificirali definirajući ili specificirajući S, čini se očito pogrješnim shvaćamo li skupove realistički. Definiramo li skup $\{0\}$ kao najmanji skup koji sadrži 0 kao element, *naravno* da je $\{0\}$ jedan od skupova nad kojim smo kvantificirali našom definicijom. Ali za Russella ne postoji neki *entitet* iza definicije skupa – u svakome slučaju, ne tako izravno – već je sve što imamo samo ta definicija, izraz koji sadrži vezanu varijablu čije su vrijednosti također samo izrazi koji sadrže vezane varijable, a koji sam, kao izraz, ne može biti jedna od njezinih vrijednosti. To stajalište izravna je posljedica Russellova nauka o neograničenoj varijabli. Je li takvo stajalište koherentno, posebno je pitanje koje nas ovdje toliko ne zanima.

Kazati da Russell u "Les paradoxes" prihvaća načelo poročnoga kruga kao rješenje paradoksā jest, dakle, točno, ali nije dovoljno precizno. Preciznije bi bilo reći da načelo poročnoga kruga prihvaća kao svojevrsno *regulativno* načelo koje "ispravna" logička teorija ili "pravo" rješenje mora imati kao svoju posljedicu:

> Važno je primijetiti da načelo poročnoga kruga nije samo po sebi rješenje paradoksā poročnoga kruga, već tek rezultat koji teorija mora proizvesti da bi ponudila rješenje za njih. Nužno je, to će reći, konstruirati teoriju izraza koji sadrže vezane varijable koja će proizvesti načelo poročnoga kruga kao svoju posljedicu. Zbog toga razloga trebamo rekonstrukciju logičkih prvih načela i ne možemo se zadovoljiti pukom činjenicom da je za paradokse zaslužan poročni krug. [88, str. 205]

Rekonstrukcija logičkih prvih načela o kojoj Russell govori, teorija koje je načelo poročnoga kruga posljedica, upravo je supstitucijska teorija, sa svojom radikalnom eliminacijom skupova, stavačnih funkcija i općih stavaka. No, unatoč toj eliminaciji, Russell, vrijedi još jednom ponoviti, nije nominalist u uobičajenom značenju te riječi. Stavci, makar samo elementarni, i dalje su za Russella punokrvni složeni entiteti, sastavljeni, između ostaloga, od pojmova. I pojmovi i stavci i dalje ostaju intenzionalni entiteti.

Supstitucijska teorija bez općih stavaka kao posljedicu ima načelo poročnoga kruga i uspješno izbjegava i paradokse skupova i paradokse stavaka, uključujući p_0/a_0. Pokazat će se, međutim, da je eliminacija općih stavaka puno veći problem no što je Russell isprva vjerovao: supstitucijskom teorijom bez općih stavaka ne može se rekonstruirati dobar dio klasične matematike. Zahtijevat će to uvođenje dodatne – i kontroverzne – aksiomatske sheme. Također, notacija supstitucijske teorije pokazat će se tehnički manje prikladnom od notacije koju je Russell rabio u formulaciji teorije tipova. Uz skoro Russellovo prihvaćanje teorije višestrukih relacija i potpuno napuštanje ontologije stavaka, scena je pripremljena za ono što će postati poznato kao 'Russellova razgranata teorija tipova'.

2.4 Teorija tipova u *Principia Mathematica*

S kratkim prijegledom povijesti Russellove teorije tipova iza nas, konačno možemo postaviti pitanje kako treba shvatiti stavačne funkcije u *Principia Mathematica*. Dakle, jesu li stavačne funkcije za Russella izvanjezični apstraktni entiteti – ono što se obično naziva atributima, svojstvima ili pojmovima – ili su stavačne funkcije tek jezični simboli, izrazi, otvorene formule? Vidjeli smo da su stavačne funkcije, shvaćene u ontologijski jakome smislu kao pojmovi ili atributi (ili nešto vrlo slično njima), u vremenu između *Principles* i *Principia* nestali iz Russellove ontologije. Za njima su nestali i opći stavci, a u *Principia*, vidjet ćemo, nestaju i elementarni stavci. Kako nemamo niti tekstualne potkrjepe niti uvjerljivih filozofijskih razloga vjerovati da je u slučaju stavačnih funkcija Russell promijenio stajalište i preokrenuo eliminacijski trend, tvrdit ćemo da je potonje tumačenje istinito.

Russell 1908. objavljuje članak "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" [89], u kojemu se nalazi njegova prva formulacija razgranate teorije tipova, a 1910. izlazi prvi svezak *Principia Mathematica* [122], u kojemu se nalaze dvije donekle različite formulacije teorije.[72] Prva je izložena u "Uvodu" prvoga izdanja i, osim u detaljima, vrlo se malo razlikuje od one u "Mathematical Logic". Druga je objašnjena u $*12$ i, kako stoji u predgovoru djela [122, str. vii], to "potonje objašnjenje strože je i ono je koje je pretpostavljeno u ostatku knjige." Tehničke razlike između tih dviju inačica nisu presudne za naše pitanje kako shvatiti stavačne funkcije pa ćemo se najviše zadržavati na filozofijski sadržajnijemu izlaganju u uvodu, gdje Russell puno detaljnije objašnjava središnje pojmove i filozofijski okvir razgranate teorije. Zbog bliskosti objašnjenja teorije tipova u "Mathematical Logic" s objašnjenjem u uvodu *Principia*, u komentaru teorije uglavnom ćemo se držati izlaganja teorije iz *Principia*.[73] No, "Mathematical Logic" važna nam je iz razloga što u njoj Russell izričito povezuje razgranatu teoriju tipova sa svojom supstitucijskom teorijom. Štoviše, povezuje ju na način koji, kako ćemo vidjeti malo niže, baca svjetlo na staro interpretacijsko pitanje kako točno razumjeti ontologijski status Russellovih stavačnih funkcija u razgranatoj teoriji.

2.4.1 Razgranata hijerarhija stavačnih funkcija

Tipska je hijerarhija u razgranatoj teoriji složenija od one u nacrtu teorije tipova u *Principles*. U prvoj inačici teorije tipova, predloženoj u "Dodatku B", koja otprilike odgovara jednostavnoj teoriji tipova (ne računamo li prijedlog da zbroj nekoliko minimalnih tipova i sam tvori tip), skup je svih pojedinačnosti tip, skup je svih skupova pojedinačnosti tip, skup je svih skupova skupova pojedinačnosti tip, itd. Gledamo li na teoriju tipova radije kao na teoriju atributa nego na teoriju skupova,[74] odgovarajući bi tipovi bili skup svih pojedinačnosti, skup svih svojstava pojedinačnosti, skup svih svojstava svojstava pojedinačnosti, itd. Slično, naravno, vrijedi za stavačne funkcije s više argumenata, ali dolje ćemo, jednostavnosti radi, govoriti samo o stavačnim

[72] *Principia* su pisana u suautorstvu s A. N. Whiteheadom, no Whitehead je, kaže Russell u svojoj filozofijskoj autobiografiji [98, str. 74], iako zaslužan za većinu notacije u djelu (ne računajući onu preuzetu od Peana), filozofijska pitanja prepustio Russellu.

[73] Teorija iz 1908. i teorija iz 1910. *u jednome smislu* doista jesu jedna te ista teorija i tipično ih se kao takve gleda. U opisu hijerarhije tipova, u notaciji i nazivlju koje Russell u izlaganju rabi, u različitim pratećim razmatranjima (npr. u analizi paradoksā) i sl., nema očite bitne razlike. Tako Church [14, str. 747], govoreći o trima inačicama razgranate teorije tipova (dvije Russellove i svojoj iz *Introduction to Mathematical Logic* [13]), teoriju iz 1908. i teoriju iz uvoda *Principia* razumije kao istu inačicu. Međutim, Cocchiarella [17] naglašava da se radi o različitim teorijama utoliko što je Russellova pozadinska ontologija stavaka i stavačnih funkcija 1910. različita od one iz 1908. U "Mathematical Logic", tvrdi Cocchiarella, Russell prihvaća stavke kao posebne entitete, ali ne i stavačne funkcije, dok su u *Principia*, obrnuto, funkcije sada posebni izvanjezični entiteti, ali ne više i stavci.

[74] Nije očito može li se Russellova teorija tipova u *Principles* shvatiti kao teorija atributa. Pojmove, tj. priroke i relacije, barem one označene jednom riječju, Russell ubraja u *pojedinačnosti*. Samo ako stavačne funkcije shvatimo kao atribute, a atribute time kao predmete koji su *različiti* od pojmova, teorija u "Dodatku B" može biti teorija atributa. No čak i tada, hijerarhija u *Principles* je, u Russellovu opisu, hijerarhija skupova (tj. područjā), ne hijerarhija stavačnih funkcija.

funkcijama s jednom slobodnom varijablom. Tip je, općenito, područje značenja stavačne funkcije ili, drugim riječima, područje mogućih vrijednosti varijable. Usvojimo li nešto noviji način za označavanje tipova i za svaku varijablu gornjim pokazateljem naznačimo kojemu tipu pripada, x^0 bi bila individualna varijabla, tj. varijabla vrijednosti koje su pojedinačnosti, a njezino je područje vrijednosti skup svih pojedinačnosti; $x^{\langle 0\rangle}$ je varijabla vrijednosti koje su skupovi (ili svojstva) pojedinačnosti, a njezino je područje vrijednosti skup *svih* skupova (ili svojstava) pojedinačnosti; $x^{\langle\langle 0\rangle\rangle}$ je varijabla koja kao područje vrijednosti ima skup *svih* skupova skupova (ili svojstava svojstava) pojedinačnosti... Dakle, kako smo naglasili kurzivom, skup svih skupova pojedinačnosti, odnosno skup svih svojstava pojedinačnosti, tvori zaseban tip. Jednako je tako skup svih skupova skupova pojedinačnosti, odnosno skup svih svojstava svojstava pojedinačnosti, zaseban tip. U razgranatoj teoriji, međutim, to više nije slučaj.

Prije nego pojasnimo u čemu je razlika, promijenit ćemo malo frazeologiju. U *Principles* Russell objašnjava tipsku hijerarhiju u terminima skupova – preciznije, u terminima "područjā", ali 'range' se ondje odnosi općenito na skupove. U *Principia* skupova službeno nema, vrijednosti varijabla samo su pojedinačnosti i stavačne funkcije.[75] U jednostavnoj teoriji tipova tako bi x^0 bila varijabla čije su vrijednosti pojedinačnosti, a njezino područje vrijednosti skup svih pojedinačnosti; $x^{\langle 0\rangle}$ varijabla čije su vrijednosti stavačne funkcije koje kao argumente imaju pojedinačnosti, a njezino je područje vrijednosti skup svih takvih stavačnih funkcija: $x^{\langle\langle 0\rangle\rangle}$ je varijabla čije je područje vrijednosti skup svih stavačnih funkcija čiji su argumenti funkcije koje kao argumente imaju samo pojedinačnosti, itd.[76]

Paradoks stavaka u supstitucijskoj teoriji natjerao je Russella stavke također razdijeliti u različite tipove. No stavci nisu funkcije i nemaju argumente: izrazi za stavke ne sadrže slobodne pojavke varijabla. Stavci su podijeljeni ne prema slobodnim već prema vezanim varijablama u svojim izrazima, tj. prema tome nad kojim tipovima predmeta stavci pokoličuju. To je podjela

[75]Kontekstualnim definicijama u $*20$ ("Opća teorija razreda" u odsječku C, "Razredi i relacije") razredi su definirani kao određene vrste stavačnih funkcija (kao tzv. prirične ili predikativne funkcije) i tako isključeni kao zasebna vrsta entitetā iz ontologije *Principia*.

[76]Primijetimo da je tip i dalje *skup*, iako ne skup skupova, već skup stavačnih funkcija. Jedna je od mogućih kritika teorije tipova u *Principia* to da, dok se Russell nada kontekstualnim definicijama skupova ostvariti svojevrsnu ontologijsku uštedu, svejedno su nam za samu formulaciju teorije koje bi to postigla potrebni skupovi. Tako Russell u izlaganju i filozofijskom opravdanju razgranate teorije tipova načelom poročnoga kruga u uvodu *Principia* [122, str. 37-38] rabi i izraz 'skup' (*set*) i 'sveukupnost' (*totality*) i 'kolekcija' (*collection*), iako ne i 'razred' (*class*), što je njegov tehnički nazivak za skupove. Soames [104], na primjer, niječe da kontekstualne definicije u $*20$ pridonose ontologijskoj ekonomiji jer smatra da, u bilo kojoj plauzibilnoj interpretaciji, koja god vrsta entiteta stavačne funkcije bile – doista funkcije u matematičkom smislu ili pak "stavačne matrice" kao "stavci s prazninama (*gaps*)" – ta vrsta entiteta sama pretpostavlja skupovno-teorijske entitete.

stavaka prema *redovima*. Elementarni stavci i stavci koji pokoličuju samo nad pojedinačnostima, tj. stavci kojih izrazi ne sadrže druge varijable osim individualnih varijabla, stavci su prvoga reda; stavci kojih izrazi sadrže varijable vrijednosti kojih su stavačne funkcije koje kao argumente imaju samo pojedinačnosti (i kojih izrazi sami ne sadrže druge varijable osim individualnih varijabla) stavci su drugoga reda, itd.[77] Međutim, to što vezane varijable postaju relevantne za tipologiju odražava se sada i na tipsku podjelu stavačnih funkcija. Stavačne se funkcije više ne dijele samo prema vrsti argumenata, predmeta koji su moguće vrijednosti njihovih slobodnih varijabla, već također i prema tome nad kojim vrstama predmeta pokoličuju, prema vrijednostima njihovih vezanih varijabla.

Posljedica je toga da, na primjer, skup svih stavačnih funkcija argumenti kojih su samo pojedinačnosti više nije tip. Taj se skup sada dijeli na "manje skupove" [122, str. 37], ovisno o tome koje vezane varijable izraz za funkciju sadrži, i ti su manji skupovi tipovi razgranate teorije tipova. Drugim riječima, stavačne funkcije ne tvore tipove više samo prema tome koje su moguće vrijednosti njihovih slobodnih varijabla, već također i prema tome kojem *redu* one same pripadaju. Prilagodimo malo notaciju i pokušajmo stvar objasniti na primjerima.

Kao i u jednostavnoj teoriji, u razgranatoj teoriji varijabla x^0 ostaje individualna varijabla, tj. njezino je područje mogućih vrijednosti skup svih pojedinačnosti. Skup svih pojedinačnosti, drugim riječima, ostaje zaseban tip. Tu promjene nema.

Međutim, varijablu $x^{\langle 0\rangle}$ sada zamjenjuje niz varijabla $x^{\langle 0\rangle\backslash 1}$, $x^{\langle 0\rangle\backslash 2}$, $x^{\langle 0\rangle\backslash 3}$, ... Područje mogućih vrijednosti *svake* od njih sada definira poseban tip. Vrijednosti varijable $x^{\langle 0\rangle\backslash 1}$ stavačne su funkcije koje kao argumente imaju samo pojedinačnosti *i* kojih jezični izrazi ne sadrže vezane varijable osim, najviše, individualne varijable – drugim riječima, funkcije koje ne pokoličuju nad funkcijama. To su stavačne funkcije prvoga reda. Vrijednosti varijable $x^{\langle 0\rangle\backslash 2}$ stavačne su funkcije kojih su argumenti pojedinačnosti i kojih jezični izrazi sadrže vezane varijable koje kao svoje vrijednosti imaju funkcije prvoga reda, tj. sadrže, kao vezane, varijable poput $x^{\langle 0\rangle\backslash 1}$, ali ne i druge vrste varijabla, osim najviše individualnih varijabla. To su stavačne funkcije drugoga reda s pojedinačnostima kao argumentima. Funkcije koje su vrijednosti varijable $x^{\langle 0\rangle\backslash 3}$ takve su da njihovi izrazi kao slobodne varijable imaju samo individualne varijable, kao vezane

[77]Tipska razdioba stavaka je zapravo složenija od tek hijerarhije redova jer "dva stavka koji ne sadrže isti broj vezanih varijabli ne mogu biti istoga tipa." Međutim, "zahvaljujući sustavnoj višeznačnosti... njihova razlika u tipu obično može biti zanemarena u praksi." Zanemarivanjem razlike u tipu stavaka čiji izrazi sadrže različit broj količitelja, dok god su stavci istoga reda, ne krši načelo poročnoga kruga i stoga se ne moramo bojati protuslovlja niti općenito "refleksivnih pogrješaka". Na primjer, u slučaju stavaka prvoga reda, "nijedan stavak prvoga reda ne uključuje nikakvu sveukupnost osim one pojedinačnosti." [122, str. 162]

sadrže varijable za funkcije drugoga reda (poput npr. $x^{\langle 0\rangle\backslash 2}$), ali ne i druge vrste varijabla, osim najviše induvidualne varijable i varijable za funkcije prvoga reda.

Jednako tako, varijabla $x^{\langle\langle 0\rangle\rangle}$ nestaje sada kao zasebna varijabla koja određuje zaseban tip. Umjesto nje, imamo varijable $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 1\rangle\backslash 1}$, $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 1\rangle\backslash 2}$, $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 1\rangle\backslash 3}$, ..., $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 2\rangle\backslash 1}$, $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 2\rangle\backslash 2}$, $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 2\rangle\backslash 3}$, ... $x^{\langle\langle 0\rangle\backslash 3\rangle\backslash 1}$, ... Stavačne funkcije kojih su argumenti stavačne funkcije pojedinačnosti više nisu tip, kako su bile u jednostavnoj teoriji tipova. Umjesto toga, područje vrijednosti svake od novih varijabla zaseban je tip.

Radi jasnoće, precizirajmo malo naše nazivlje, najprije samo za funkcije s jednom slobodnom varijablom, a potom ćemo stvar poopćiti i na funkcije s više slobodnih varijabla, kao i na one bez slobodnih varijabla, tj. stavke. Tip definirajmo na sljedeći način: 0 je tip; ako je τ tip, onda je $\langle\tau\rangle\backslash n$ tip, za svaki prirodni broj n. Vrijednosti su varijable x^0 pojedinačnosti, vrijednosti varijable $x^{\langle\tau\rangle\backslash n}$ stavačne su funkcije tipa $\langle\tau\rangle\backslash n$; n je razina funkcije tipa $\langle\tau\rangle\backslash n$, a τ je tip argumenta te funkcije. Red funkcije zbroj je svih prirodnih brojeva u njezinu tipu. Red funkcije kazuje nam, slobodno govoreći, s kojim "vrstama stvari" imamo posla (pojedinačnostima, svojstvima, svojstvima svojstava, ...), bilo kao argumentima funkcije bilo kao područjem kvantifikacije. Razina nam govori, otprilike, za koliko redova stvari nad kojima funkcijom kvantificiramo nadvisuju red argumenata funkcije. Ako je razina 1, funkcijski izraz ne sadrži, kao vezane, varijable višega reda od najvišega reda slobodnih varijabla.

S uvođenjem stavačnih funkcija s više od jedne slobodne varijable stvar se dodatno usložnjava, ali mehanizam tipiziranja analogan je gore opisanom. Tip općenito definiramo na sljedeći način: 0 je tip; ako su τ_1, ..., τ_m tipovi, onda je $\langle\tau_1, ..., \tau_m\rangle\backslash n$ tip, za $m \geq 0$ i $n > 0$. Vrijednosti varijable $x^{\langle\tau_1,...,\tau_m\rangle\backslash n}$ stavačne su funkcije tipa $\langle\tau_1, ..., \tau_m\rangle\backslash n$, tj. stavačne funkcije s m argumenata, koji su, redom, tipa $\tau_1, ..., \tau_m$, i koje su razine n. Te su funkcije reda $N + n$, pri čemu je N najviši red njihovih argumenata.[78]

To je razlika razgranate spram jednostavne teorije tipova: umjesto jednostavnoga tipa, tj. jedinstvenoga tipa za stavačne funkcije s istim tipom argumenata, imamo grananje jednostavnoga tipa s obzirom na to nad kojim tipovima predmetā pokoličujemo – ili, drugim riječima, s obzirom na to koje vezane varijable izraz funkcije sadrži. Funkcije s istim argumentima stoga mogu biti različitoga reda, a funkcije koje su istoga reda mogu imati različite argumente. No,

[78]Gornja definicija tipa, osim u maloj razlici u notaciji, definicija je r-tipa u Churchovoj formalizaciji razgranate teorije u [14]. Posebno je korisno Churchovo razlikovanje razine i reda: Russell rabi '*order*' u obama smislovima, što, iako je iz konteksta redovito jasno na što misli, otežava precizno izlaganje razgranate teorije.

strogo gledano, varijable kao vrijednosti mogu imati samo stavačne funkcije koje su istoga razgranatoga tipa.[79]

Kao razlog za tako složenu tipologiju, Russell navodi načelo poročnoga kruga.[80] To je načelo u *Principia* eksplicirano na nekoliko vrlo različitih načina, što je neke komentatore navelo tvrditi da se zapravo radi o više različitih načela, od kojih nije svako niti jednako plauzibilno niti jednako restriktivno:[81]

> Poročni krug u pitanju nastaje iz pretpostavke da kolekcija predmeta može sadržavati članove koje se može definirati samo pomoću te kolekcije kao cjeline. [...] Općenitije, ako je dan bilo koji skup predmeta takvih da, pretpostavimo li da skup posjeduje sveukupnost (*has a total*),[82] sadržavat će članove koji pretpostavljaju tu sveukupnost, tada takav skup ne može posjedovati sveukupnost. [...] Načelo koje nam omogućuje izbjeći nelegitimne sveukupnosti (*totalities*) može se iznijeti na sljedeći način: "Što god uključuje sve neke kolekcije, ne može biti jedno iz te kolekcije"; ili, obrnuto: "Ako bi, pod uvjetom da izvjesna kolekcija posjeduje sveukupnost, ona imala članove definirljive samo u terminima te sveukupnosti, tada spomenuta kolekcija ne posjeduje sveukupnost." [122, str. 37-38]

Posljedica je načela poročnoga kruga da stavačna funkcija u razgranatoj teoriji, za razliku od jednostavne teorije tipova, nikada nije moguća vrijednost vezanih varijabla koje se nalaze u izrazu funkcije.

Radi jednostavnosti objašnjenja, uzmimo da su stavačne funkcije izvanjezični entiteti (svojstva) i primijenimo mehanizam λ-apstrakcije za nominalizaciju formula u imena svojstava. U jednostavnoj teoriji, oznaku

$$\langle \lambda x^0 . \exists x^{\langle 0 \rangle} x^{\langle 0 \rangle}(x^0) \rangle$$

[79] Mehanizam sustavne višeznačnosti, kako smo spomenuli gore, može malo oslabiti navedeno ograničenje, ali detalji nam ovdje nisu važni.

[80] Načelo poročnoga kruga odgovorno je za hijerarhiju koju smo opisali, ali ne i za tipsko razlikovanje prema broju količitelja. Za to je, kako ćemo vidjeti malo niže, zaslužna Russellova rekurzivna definicija istinitosti.

[81] Gödel [32] je prvi, čini se, koji je tvrdio da se radi o trima različitim načelima i to je postalo široko prihvaćena kritika Russellova načela poročnoga kruga. Halimi [39, str. 243] također, pozivajući se na Gödela, govori o trima različitim načelima, iako (u podrubnici 2) napominje da ne tvrdi da se ne radi o ekvivalentnim načelima.

[82] Russell dodaje da kada kaže da skup ne posjeduje sveukupnost, time ponajprije misli na to da se nijedan smisleni iskaz (*significant statement*) ne može dati o svim njegovim članovima. Odraz je to, mislim, cantorovskoga razlikovanja između onih mnoštvenosti koje se mogu i onih koje se ne mogu shvatiti kao jedna cjelina ili kao zasebni entiteti. Vidi prvo potpoglavlje i Russellovo pismo Fregeu.

neformalno možemo razumjeti kao ime svojstva pojedinačnosti "imati neko svojstvo pojedinačnosti". Tip je te oznake $\langle 0 \rangle$, što znači da ona sama označuje neko svojstvo koje se odnosi na pojedinačnosti, tj. stavačnu funkciju čiji su argumenti pojedinačnosti: "imati neko svojstvo pojedinačnosti" i samo je jedno od svojstava koja se mogu priricati pojedinačnostima. Dakle, svojstvo označeno λ-apstraktom i samo je jedno od mogućih vrijednosti vezane varijable koja se nalazi u apstraktu ($x^{\langle 0 \rangle}$). Jednostavna teorija tipova krši načelo poročnoga kruga. Stoga jednostavna teorija dopušta tzv. neprirične ili impredikativne definicije, tj. definicije koje pokoličavaju nad nekim skupom (ili "sveukupnošću") predmetā koje je predmet koji definiramo i sam član.

U razgranatoj teoriji, s druge strane, $\langle 0 \rangle$ nije tip: umjesto varijable $x^{\langle 0 \rangle}$, imamo $x^{\langle 0 \rangle \backslash 1}$, $x^{\langle 0 \rangle \backslash 2}$, $x^{\langle 0 \rangle \backslash 3}$ itd. Time u razgranatoj teoriji nema svojstva "imati neko svojstvo pojedinačnosti", već imamo "imati neko svojstvo pojedinačnosti, razine 1", "imati neko svojstvo pojedinačnosti, razine 2", itd. Oznaku

$$\langle \lambda x^0 . \exists x^{\langle 0 \rangle \backslash 1} x^{\langle 0 \rangle \backslash 1}(x^0) \rangle$$

neformalno možemo čitati kao ime svojstva "imati neko svojstvo pojedinačnosti, razine 1". Ta oznaka također označava neku stavačnu funkciju koje su argumenti pojedinačnosti. Međutim, kako formula $\exists x^{\langle 0 \rangle \backslash 1} x^{\langle 0 \rangle \backslash 1}(x^0)$ sadrži vezanu varijablu prvoga reda ($x^{\langle 0 \rangle \backslash 1}$), ta oznaka, prema načelu poročnoga kruga i pravilima tipizacije razgranate teorije, nije prvoga reda (tj. razine 1), već je reda 2 (tj. razine 2). Gornji je apstrakt tipa $\langle 0 \rangle \backslash 2$: on označava svojstvo pojedinačnosti, ali ne svojstvo pojedinačnosti koje je moguća vrijednost vezane varijable $x^{\langle 0 \rangle \backslash 1}$, već svojstvo višega reda. Svojstvo "imati neko svojstvo pojedinačnosti, razine 1" svojstvo je pojedinačnosti koje je razine 2. Stoga, kako vidimo, razgranata teorija tipova ne dopušta neprirične definicije: što god definirali pokoličavanjem nad svim članovima nekoga skupa, ne može biti član toga skupa.

U praksi, zahvaljujući tzv. sustavnoj višeznačnosti (*systematic ambiguity*), često nije potrebno eksplicitno navesti tip varijable.[83] Unatoč tomu, načelo poročnoga kruga i složena tipska hijerarhija koju ima kao posljedicu, ne dopuštajući neprirične definicije, onemogućavaju izvođenje velikoga dijela klasične matematike unutar sustava razgranate teorije tipova.[84] Russell

[83] Sustavnu višeznačnost objašnjava Russell u uvodu *Principia* [122, str. 41-47]. Malo dalje kaže: "Zahvaljujući toj sustavnoj višeznačnosti, bit će moguće, ponekad, spojiti u jedan verbalni iskaz ono što je zapravo više različitih iskaza, koji odgovaraju različitim redovima u hijerarhiji." [122, str. 55]

[84] Prema Fefermanu [20], velik dio matematike, uključujući možda i *svu* matematiku primjenjivu u prirodnim znanostima, *može* se rekonstruirati bez primjene impredikativnih definicija, iako, doduše, ne u sustavu poput Russellova.

stoga u sustav *Principia* uvodi tzv. aksiom svedljivosti (*reducibility*). Aksiom svedljivosti – preciznije, aksiomatska shema svedljivosti – osigurava da za svaku stavačnu funkciju postoji njoj "formalno istovrijedna" (*formally equivalent*) prirična (*predicative*) stavačna funkcija. Priričnim funkcijama naziva pak Russell [122, str. 54] stavačne funkcije "koje ne uključuju nikakvu sveukupnost osim one mogućih vrijednosti argumenta, i onih koje su pretpostavljene bilo kojim mogućim argumentom."[85] Prirične su funkcije, dakle, one kojih izrazi ne sadrže vezane varijable višega reda od reda njihovih slobodnih varijabla. Drugim riječima, u korisnu Churchovu nazivlju, prirične su funkcije one koje su razine 1. Dvije su funkcije pak formalno istovrijedne ako i samo ako su zadovoljene upravo istim predmetima, tj. ako i samo ako pridružuju istinit stavak upravo istim argumentima. Jednostavnije rečeno, formalno su istovrijedne one funkcije koje su koekstenzivne. Aksiomatska shema svedljivosti tako kaže da za svaku funkciju postoji njoj koekstenzivna funkcija razine 1.[86]

Aksiomatska shema svedljivosti uspješno simulira impredikativnost klasične matematike i omogućuje Russellu i Whiteheadu, unutar sustava razgranate teorije sa svedljivošću, izvesti velike dijelove klasične matematike. Naravno, uvođenje aksiomatske sheme svedljivosti teško je opravdati na logicističkim osnovama i tipično se smatra da je nužnost njegova uvođenja pokazala da je Russellov ambiciozan projekt *svođenja* matematike na logiku završio neuspjehom.[87] No, za našu priču to nije toliko bitno.

[85] Zanimljiva je povijest i promjena značenja izraza 'prirična stavačna funkcija'. U "On Some Difficulties", prijetimo se, Russell priričnima naziva one stavačne funkcije koje definiraju razrede, odnosno koje postoje kao zasebni entiteti. Poincarévov je prijedlog u "Les mathématiques et la logique" da su prirične funkcije, u tome smislu, one koje ne krše načelo poročnoga kruga. Russell prihvaća sugestiju, ali zatim daje izrazu uže značenje koje smo naveli gore. No, u $*12$ *Principia* taj se izraz rabi još kao istoznačan izrazu 'matrica' (*matrix*), što je u *Principia* izraz za stavačne funkcije (ili izraze za funkcije) koje ne sadrže vezane varijable: "Za funkciju kažemo da je prirična kada je matrica." [122, str. 164] Za povijest izraza 'prirično' vidi također Quine [82, str. 242].

[86] Russell i Whitehead napominju [122, str. 58] da jednako dobro može poslužiti bilo koji aksiom koji bi osigurao da za svaku funkciju postoji neka koekstenzivna funkcija fiksne razine n, ne nužno razine 1.

[87] Vidi npr. Linsky [63]. Sam Russell [122, str. 59-60] za aksiom daje tek "induktivno" ili pragmatično opravdanje i čak napominje da je moguće da je "uporaba načela poročnoga kruga, kako je utjelovljena u gornjoj hijerarhiji tipova, drastičnija nego što mora biti, i da manje drastičnom uporabom nužnost aksioma može biti izbjegnuta." Kasnije, u *Introduction to Mathematical Philosophy* [94, str. 192-193], o aksiomu svedljivosti, koji vidi kao poopćenje Leibnizova načela istovjetnosti nerazlučivoga, piše da, iako istinit u aktualnome svijetu, ne vidi "nijedan razlog za vjerovati da je aksiom svedljivosti logički nužan". Kao zanimljivost, nedavno je Mares [66], na temelju Linskyjeva tumačenja razgranate teorije u [64], ponudio formalnu semantiku za razgranatu teoriju u kojoj je aksiom svedljivosti valjan. Uz aksiom svedljivosti, kao problem za logicizam također se uzimaju aksiom izbora i, posebno, aksiom beskonačnosti. Iako aksiom beskonačnosti nije službeno uveden *qua* aksiom (vidi [122, str. 131]), gdje god je beskonačnost potrebna za dokaz nekoga poučka, "aksiom" beskonačnosti stavljen je kao prednjak pogodbe s tim poučkom kao njezinim posljedkom. Kako aksiom beskonačnosti pretpostavlja da opstoji beskonačno mnogo predmeta, on se obično vidio kao empirijska, ne logička tvrdnja. Usp. Godwyn i Irvine [33, str. 184]. Landini [61, str. 282-283] tvrdi da Russell pokazuje vrlo malo zabrinitosti zbog toga što dokaz Peanovih aksioma zahtijeva pretpostavku beskonačno mnogo *pojedinačnosti*, jer u to vrijeme još uvijek prihvaća postojanje univerzalija kao logičkih predmeta, a one su, kao i bilo što drugo što postoji, vrijednosti individualnih varijabla.

Naše pitanje o ontologijskome statusu stavačnih funkcija u *Principia Mathematica* pitanje je, dakle, je li gore ocrtana hijerarhija ontologijska hijerarhija, tj. hijerarhija *entitetā* (pojedinačnosti, svojstava i relacija) ili tek jezična hijerarhija, hijerarhija *izrazā*. Prije odgovora, bacimo pogled na ono što bi se, uzevši u obzir povijest i kontekst nastanka razgranate teorije tipova, moglo opravdano smatrati filozofijski središnjim mjestom za razumijevanje razgranate teorije.

2.4.2 Eliminacija stavaka i rekurzivna definicija istinitosti

Tvrdili smo da je Russell, vođen naukom o neograničenoj varijabli i opremljen svojom teorijom označavajućih fraza, koja mu je omogućila izraze koji naizgled referiraju na entitete analizirati kao nepotpune simbole, postupno eliminirao skupove, stavačne funkcije i opće stavke iz pozadinske ontologije svoje logičke teorije. Naime, smatrao je da je neka vrsta tipskoga razlikovanja nužna za rješenje paradoksā, no u isto je vrijeme bio nesklon napustiti zahtjev da logika mora imati samo jednu vrstu "istinskih" varijabli, vrijednost kojih može biti bila koja oznaka, bilo što što jest. Rješenje koje je pomirilo ta dva zahtjeva bilo je dopustiti nešto poput tipske hijerarhije i varijable viših tipova, ali ujedno zanijekati da su vrijednosti tih varijabla "pravi" entiteti. Supstitucijska je teorija trebala pokazati na koji se način to može učiniti. Ako je to rješenje uspješno, tipska hijerarhija se svodi na puku hijerarhiju izrazā, a *svi* su entiteti vrijednost varijabla najnižega tipa.

U *Principia* Russell odlazi korak dalje i iz ontologije uklanja također i elementarne stavke, tj. stavke izrazi kojih ne sadrže količitelje. Razlog je, čini se plauzibilnim tvrditi, ponovo nauk o neograničenoj varijabli. Naime, kako smo kazali u odsječku o supstitucijskoj teoriji, tražeći rješenje za p_0/a_0 paradoks, Russellu se činilo da rješenje mora uključiti razlikovanje stavaka od "običnih" entiteta i razlikovanje stavačne od entitetske supstitucije. S druge strane, njegova ga metafizika stavaka obvezuje tvrditi da stavci i sami *jesu* neka vrsta entiteta. Međutim, u tom slučaju razlikovanje supstitucije primjerene za stavke i supstitucije primjerene za ostale entitete znači uvesti dvije vrste "pravih" ili "istinskih" varijabli, što pak znači, očito, kršenje nauka o neograničenoj varijabli. Dok god stavci jesu zasebni entiteti, čak i ako su jedini stavci koji postoje elementarni stavci, Russellov logicizam, sa svojim zahtjevom da područje vrijednosti varijabla ne smije biti ograničeno na ove ili one vrste entiteta, ima problem. Potpunim uklanjanjem stavaka iz ontologije – tj. teorijom prema kojoj su *svi* izrazi koji naizgled stoje za stavke također nepotpuni simboli – Russell rješava taj problem.[88]

Russell u uvodu *Principia* iznosi teoriju stavaka koja će kasnije postati poznata kao 'teorija višestrukih relacija'.[89] "Činjenica da su stavci 'nepotpuni simboli'", kaže Russell [122, str. 44], "važna je filozofijski i relevantna na izvjesnim mjestima u simboličkoj logici." Čitajući *Principia* izvan konteksta ranijih njegovih hrvanja s problemom paradoksā, posebno ako se teorija tipova u *Principia* shvati kao nagli prekid i napuštanje supstitucijske teorije, radije nego njezin nastavak, lako je propustiti primijetiti *koliko* je eliminacija stavaka doista važna za razumijevanje Russellove razgranate teorije tipova. Prije nego nešto više kažemo o tome, vrijedi navesti kako novu teoriju stavaka opisuje sam Russell:

> Svemir se sastoji od predmeta koji imaju različite kvalitete (*qualities*) i stoje u različitim relacijama. Neki od predmeta koji se pojavljuju u svemiru složeni su (*complex*). Kada je predmet složen, sastoji se od međusobno povezanih (*interrelated*) dijelova. Razmotrimo složeni predmet koji je sastavljen (*composed*) od dvaju dijelova a i b koji stoje jedan prema drugomu u relaciji R. Taj složeni predmet "a-u-relaciji-R-prema-b" može biti *opažen* (*perceived*); kada je opažen, opažen je kao jedan predmet. Pažnja može pokazati da je on složen; tada *sudimo* (*judge*) da a i b stoje u relaciji R. [...] Taj opažajni sud, razmotren kao stvaran događaj, relacija je četiriju oznaka, naime a i b i R i opažatelja. Opažanje, naprotiv, relacija je dviju oznaka, naime "a-u-relaciji-R-prema-b" i opažatelja. [...] Vidi se da, prema gornjemu objašnjenju, sud nema jedan predmet, naime stavak, već ima nekoliko međusobno povezanih predmeta. To će reći, relacija koja tvori sud nije relacija dvije oznake, naime uma koji sudi i stavka, već je relacija nekoliko oznaka, naime uma i onoga

[88]Landini u [59] (i drugdje) uvjerljivo argumentira da glavni razlog za Russellovo napuštanje ontologije stavaka leži u Russellovoj namjeri rješenja paradoksā bez napuštanja nauka o neograničenoj varijabli: "Razlog zašto je Russell napustio stavke 1910. jest zbog paradoksā stavaka i njegove želje izbjeći uvođenje hijerarhije redova i računa za logiku s ograničenim varijablama." [58, str. 323] Linsky [64], s druge strane, objašnjava Russellovo napuštanje stavaka razmatranjima povezanima s problemom jedinstva stavaka (*unity of propositions*). Proops [79] razlog pak vidi u tome što je Russell u godinama nakon "On Denoting" prepoznao da ga njegov odgovor na slavnu zagonetku s Đurom IV. iz toga članka obvezuje tvrditi da sa stavcima ne možemo biti izravno upoznati (*acquainted*). Moguće je, naravno, da sva tri objašnjenja otkrivaju dio Russellovih razloga, no nama je ovdje važno samo prvo.

[89]Sam izraz 'višestruke relacije' (*multiple relations*) ne javlja se u *Principia*, ali Russell ga rabi u eseju "On the Nature of Truth and Falsehood" u knjizi *Philosophical Essays* [91, str. 180], objavljenoj 1910., dakle iste godine kada i prvi svezak *Principia*. Teško je reći kada je točno esej napisan, ali Proops [79, str. 189] tvrdi da je vrlo vjerojatno da "taj članak predstavlja malo kasniju poziciju od one u *Principia*." U članku Russell razvija nekoliko argumenata protiv opstojnosti stavaka. Kasnije, pod utjecajem Wittgensteinovih prigovora, Russell napušta teoriju višestrukih relacija. Za analizu Wittgensteinovih argumenata i Russellovih razloga za napuštanje teorije vidi u Stevens [106]. Russell [95] će kasnije vratiti stavke u svoju ontologiju, ali kao znatno drugačiju vrstu entitetā.

> što se naziva sastavnicama stavka. [...] Zahvaljujući množini predmetā u jednome sudu, slijedi da ono što nazivamo "stavkom" (u smislu u kojem se on razlikuje od fraze koja ga izražava) nije uopće jedinstven (*single*) entitet. To će reći, fraza koja izražava stavak ono je što nazivamo "nepotpunim" simbolom; ona nema značenje sama po sebi (*in itself*), već zahtijeva nekakvu nadopunu (*supplementation*) kako bi stekla potpuno značenje. Ta je činjenica donekle prikrivena tom okolnošću što sud sam po sebi pribavlja dostatnu nadopunu i što sud sam po sebi ne čini *verbalni* dodatak stavku. [122, str. 43-44]

Gore iznesena teorija stavaka, prema kojoj stavci ne postoje kao nekakvi zasebni entiteti, sadrži nekoliko elemenata važnih za razumijevanje Russellove razgranate teorije tipova.

(1) Prisjetimo se, u *The Principles of Mathematics* (i kasnije), Russell stavcima smatra složene entitete, neovisne o umu, čije su sastavnice stvari i pojmovi i koje odlikuje određeno jedinstvo koje ne odlikuje npr. skupove. Drugim riječima, otprilike ono što bismo danas opisali kao činjenice ili stanja stvari. Kada Russell u *Principia* kaže da stavci nisu zasebni entiteti, to *ne* znači da sada smatra da ti složeni, o umu neovisni entiteti, tj. činjenice ili stanja stvari, ne postoje. Naprotiv, entiteti poput a-u-relaciji-R-prema-b i dalje su punopravni članovi Russellove ontologije, i dalje su entiteti koji ne ovise o prosuditelju ili opažatelju, i dalje kao svoje sastavnice imaju stvari (npr. a i b) i pojmove (R). Russell, dakle, ne niječe da ti složeni entiteti postoje, samo ih više ne poistovjećuje sa stavcima. Razlog je taj što, prema teoriji višestrukih relacija, ti složeni entiteti nisu jedinstven predmet suda (i drugih tzv. stavačnih stavova): uopće *nema* jedinstvena predmeta suda. Stoga se rečenica, za koju bi ranije smatrao da ima značenje po sebi ili "u izolaciji", tj. za koju bi smatrao da stoji za neki jedinstven predmet suda – a značenje je za Russella uvijek označavanje, *Bedeutung*, stajanje za neki predmet – sada pokazuje kao ne-označavajuća, bez značenja po sebi. Dakle, kao nepotpun simbol.

Razdvojivši na taj način rečenice od stanja stvari koje te rečenice naizgled izražavaju ili znače, sada možemo kazati, na primjer, da stavak "a je u relaciji R prema b" nije u području značenja stavačne funkcije "x je čovjek" – misleći time da *rečenica* "a je u relaciji R prema b" ne može legitimno doći na mjesto varijable u *izrazu* "x je čovjek" – a ujedno dopustiti da entitet a-u-relaciji-R-prema-b *jest* moguća vrijednost varijable x! Kao i u slučaju oponašanja hijerarhije stavačnih funkcija u jeziku supstitucijske teorije, imamo hijerarhiju izrazā potrebnu za izbjegavanje paradoksā, ali ne i hijerarhiju entitetā. Sve što jest, moguća je vrijednost individualnih varijabli i nauk o neograničenoj varijabli ostaje sačuvan. Je li to filozofijski prihvatljiv način za sačuvati ga, drugo je pitanje.

(2) Iako Russell u gornjem citatu rabi izraz 'kvaliteta' a ne 'prirok', čini se očitim da su kvalitete ono što u *The Principles of Mathematics* nazivlje 'prirocima' ili 'pridjevima'.[90] U *Principles* je podijelio pojmove na priroke (ili razredne pojmove) i relacije i tvrdio da svaki stavak mora sadržavati barem jedan pojam. Stavaka, kao predmeta sudova, više nema u ontologiji, ali činjenice, složeni entiteti koje je poistovjećivao sa stavcima, još uvijek su tu – iako, doduše, samo oni koje je poistovjećivao s elementarnim stavcima – i ti složeni entiteti kao svoje sastavnice, vidimo na primjeru složenoga entiteta a-u-relaciji-R-prema-b, sadrže pojmove, tj. kvalitete, kako ih sada naziva, i relacije. Kako smo već više puta primjećivali na različitim mjestima u ovome radu i za različite etape u razvoju Russellove logičke teorije, to znači da Russell nije nominalist – ne u tom smislu da niječe da postoje pojmovi ili univerzalije, kao ontologijski ravnopravni onim entitetima koje u *Principles* naziva 'stvari'.[91] Razgranata teorija tipova, čak i ako je razgranata hijerarhija stavačnih funkcija i stavaka doista tek hijerarhija izrazā, pojmove ne uklanja iz ontologije. Prema nauku o neograničenoj varijabli, pojmovi također moraju biti vrijednosti individualnih ili entitetskih varijabli, baš kao i stvari. No tada odmah uočavamo da stavačne funkcije, što god one bile, nisu isto što i kvalitete i relacije, tj. nisu isto što i pojmovi koji su sastavnice složenih entiteta poput a-u-relaciji-R-prema-b. Pojmove u razgranatoj teoriji tipova – baš kao i u ranoj teoriji tipova u *Principles* – treba tražiti na najnižoj razini tipske hijerarhije, zajedno sa svim ostalim entitetima.[92]

(3) Izrazi za stavke nisu nepotpuni simboli u smislu u kojem su npr. izrazi za razrede i određeni opisi nepotpuni simboli. U logičkoj analizi u "On Denoting" određeni opisi nestaju kao *simboli*, baš kao što *simboli* za razrede nestaju u kontekstualnoj definiciji razredā u $*20$ *Principia*. U slučajevima određenih opisa i razredā pokazuje Russell da su ti izrazi nepotpuni simboli na taj način što pokazuje na koji se način rečenice koje te izraze sadrže, i koje time naizgled referiraju na logički problematične entitete, logičkom analizom sustavno prevode u

[90]U *Principia* izraz 'prirok' (*predicate*) ima znatno različito značenje: priroci su, naime, priričné stavačne funkcije. Vidi npr. [122, str. 56]. Problem je što, nažalost, Russellovo nazivlje ne razlikuje pažljivo između pojmova ili univerzalija koji tvore složene entitete poput a-u-relaciji-R-prema-b i stavačnih funkcija.

[91]U vrijeme i neposredno nakon *Principia*, Russell obično rabi '*universals*' za "stvari koje se ponekad nazivaju 'apstraktnim idejama'" [93, str. 76] i '*particulars*' za entitete "koji ulaze u složevine (*complexes*) samo kao podmeti" [92, str. 23]). Russell u tome razdoblju detaljno iznosi svoje poglede o univerzalijama u članku "On the Relations of Universals and Particulars" [92] i knjizi *The Problems of Philosophy* [93].

[92]U nacrtu teorije tipova u *Principles*, pojedinačnost je sve što nije skup, "svi predmeti označeni jednom riječju, bilo stvari bilo pojmovi", kako Russell izričito kaže [96, str. 523]

rečenice koje te izraze ne sadrže i čija nas istinitost stoga ne obvezuje tvrditi da stvarno postoje entiteti poput sadašnjega francuskoga kralja i praznoga skupa. Ništa se slično ne može učiniti sa simbolima za stavke – naime, za rečenice same. Simboli za stavke *ne* nestaju logičkom analizom, a jednako tako, čini se, ne nestaju niti simboli za stavačne funkcije. Ili, da budemo malo precizniji, za razliku od eliminacije stavačnih funkcija u supstitucijskoj teoriji, Russell, barem koliko je do samih *Principia*, nije pokazao *kako* bi to trebalo eliminirati izraze za stavke. No tada su izrazi za stavke nepotpuni simboli samo utoliko što, prema Russellu, naizgled označavaju neki jedinstveni predmet suda, a taj jedinstveni predmet suda ne postoji: suđenje nije dvočlana relacija između uma i nekoga predmeta, već višestruka relacija između uma i entitetā koji su sastavnice odgovarajućega složenoga entiteta, tj. činjenice ili stanja stvari. Međutim, to znači da netko tko prihvaća Russellovu analizu u slučaju razreda i određenih opisa, ujedno može odbaciti njegovu tvrdnju da su stavci (i stavačne funkcije) nepotpuni simboli i, bez promjene u logičkom simbolizmu *Principia*, tretirati stavke (i stavačne funkcije) kao punopravne članove pozadinske ontologije.

Točke (1) i (2) govore u prilog stajalištu da su stavci i stavačne funkcije za Russella tek izrazi; točka (3) govori da, prihvativši Russellovu razgranatu teoriju tipova, ne moramo prihvatiti i Russellovu metafiziku. Način na koji Russell razumije stavačne funkcije razgranate teorije tipova možda nije ujedno i najbolji način kako ih razumjeti.

Važna posljedica uklanjanja stavaka iz ontologije to je što Russell sada izričito mora navesti pod kojim su uvjetima "stavci", shvaćeni sada samo kao izrazi, tj. iskazi, istiniti, kao i to što zapravo znači da je stavačna funkcija istinita za taj i taj argument. Dok je stavke, uključujući opće stavke, prihvaćao kao zasebnu vrstu složenih entiteta, mogao je jednostavno kazati da za stavak biti istinit znači naprosto postojati (*exist*). Bez stavaka, Russell u *Principia* iznosi rekurzivnu korespondencijsku definiciju istinitosti, prema kojoj "riječi 'istinito' i 'neistinito' imaju mnoga različita značenja, ovisno o vrsti stavaka na koju su primijenjeni" [122, str. 42].

U slučaju elementarnoga suda, npr. "a stoji u relaciji R prema b", sud je istinit ako i samo ako postoji odgovarajući složeni entitet, npr. a-u-relaciji-R-prema-b. Tu vrstu istinitosti naziva Russell 'elementarnom istinom' ili 'prvom istinom'. Međutim, u slučaju općih sudova ne postoji neki jedinstven odgovarajući složeni entitet – ne postoje opći stavci niti opći složeni entiteti. Pojam istinitosti koji primjenjujemo na opće sudove stoga se razlikuje od pojma istinitosti koji primjenjujemo na elementarne sudove. Za opći sud, npr. "Svi ljudi su smrtni", kazati da je istinit znači da je svaki sud oblika "x je smrtan" istinit. Ako sudovima poput "Sokrat je smrtan" i "Platon je smrtan" pripada (u danome kontekstu) prva istina, onda kažemo da sudu poput "Svi ljudi su smrtni" pripada istina drugoga reda. Slično, sud "Neki ljudi su smrtni" istinit je ako i samo ako ima neki x takav da je "x je smrtan" istinit u njemu pripadajućemu smislu. No, istinitost svakoga suda (i iskaza) ovisi konačno o istinitosti odgovarajućih elementarnih sudova, tj. u opstojnosti odgovarajućih složenih entiteta. Smisao u kojem je sud istinit ovisi pak o broju koraka koje treba učiniti da bismo došli do istinitosti tih elementarnih sudova.

Uočimo da to znači da dva iskaza koja sadrže različit broj količitelja ne mogu biti istinita u *istome* smislu, čak i ako su ta dva iskaza istoga reda. Uzmimo, na primjer, iskaze $\forall x^0 A^{\langle 0\rangle}(x^0)$ i $\exists x^0 \forall y^0 B^{\langle 0,0\rangle}(x^0, y^0)$, gdje su $A^{\langle 0\rangle}$ i $B^{\langle 0,0\rangle}$ konstante naznačenoga tipa. Ti su iskazi istoga reda – jedina sveukupnost koju pretpostavljaju ona je pojedinačnosti. Za iskaz $\forall x^0 A^{\langle 0\rangle}(x^0)$ kažemo da je istinit ako i samo ako je, za svaki x^0, *elementarni* iskaz $A^{\langle 0\rangle}(x^0)$ (dakle, iskazi $A^{\langle 0\rangle}(a^0)$, $A^{\langle 0\rangle}(b^0)$, ...) istinit. Iskaz $\exists x^0 \forall y^0 B^{\langle 0,0\rangle}(x^0, y^0)$ nije istinit u istom smislu: on je istinit ako i samo ako postoji neki x^0 za koji je *opći* iskaz $\forall y^0 B^{\langle 0,0\rangle}(x^0, y^0)$ istinit.

Takva definicija istinitosti u Russellovoj tipologiji ima za posljedicu da dodatno usložnjava tipsku hijerarhiju koju smo skicirali prije nekoliko stranica jer, kako nam Russell kaže u opisu tipske hijerarhije u $*12$, "dva stavka koji ne sadrže isti broj vezanih varijabla ne mogu biti istoga tipa." [122, str. 162] Tipska hijerarhija razgranate teorije tipova ne ovisi, dakle, samo o načelu poročnoga kruga, već također i o rekurzivnoj definiciji istinitosti.

2.4.3 Stavačne funkcije kao nepotpuni simboli

Što su, dakle, za Russella stavačne funkcije u *Principia Mathematica*? Tri su glavna argumenta da je Russell sam stavačne funkcije razumio samo kao izraze, kao nepotpune simbole, koji ne označavaju nekakve izvanjezične apstraktne entitete: pojmove, svojstva, atribute, univerzalije ili što slično. Cijeli kratki prijegled povijesti i filozofijskoga konteksta razvoja razgranate teorije tipova koji smo opisali na prethodnim stranicama opis je jednoga od njih: razmatranja koja su vodila Russella sve od vremena pisanja *The Principles of Mathematics*, prije svega njegovo prihvaćanje nauka o neograničenoj varijabli, obvezuju ga tvrditi da stavačne funkcije nisu drugo do izrazi. Drugi je argument to što, shvatimo li stavačne funkcije kao tek nepotpune simbole, važne i naizgled neobične značajke logike *Principia*, prije svega načelo poročnoga kruga i razgranata tipska hijerarhija, imaju puno bolje opravdanje nego što se na prvi pogled može učiniti.[93] Treći

[93]Landini [59, str. 6] ističe da ako Russell u *Principia* doista usvaja prave ograničene varijable, vrijednosti kojih mogu biti samo određene vrste entiteta, onda "cjelokupan filozofijski uvod" *Principia* djeluje tek kao zbrka

je argument to što nam tako sam Russell izričito kaže, iako, nažalost, ne u *Principia*. Izložimo ukratko ta tri argumenta.

(1) Vidjeli smo da razgranata teorija tipova nije nagli prekid s prethodnim Russellovim pokušajima rješavanja problema paradoksā. Usvajanje razgranate teorije nije jednostavno napuštanje supstitucijske teorije. Naprotiv, teoriju tipova u *Principia* treba razumjeti upravo kao nastavak ranije supstitucijske teorije, koja je sama pak nastavak i razvoj teorije tipova iz *Principles*.

Russell u *Principles* izraz 'pojedinačnost' (*individual*) rabi kao istoznačnicu izrazima 'oznaka' (*term*) i 'biće' (*entity*), dakle izraz za sve što uopće jest ili ima bitak [96, str. 43]. Individualne varijable u "Dodatku B" entitetske su varijable i njihove su vrijednosti "bilo stvari bilo pojmovi", uključujući i ono što nazivlje 'razredi kao jedno' (*classes as one*) [96, str. 523]. Skupovi – preciznije, u tadašnjem Russellovu nazivlju, razredi kao mnoštva (*classes as many*) – prema tome prijedlogu nisu vrijednosti individualnih varijabla. No razredi kao mnoštva i sami u nekome smislu *jesu* – barem se tako čini. Stoga se čini i da uvođenje posebnih varijabla za skupove krši zahtjev za neograničenim "istinskim" varijablama logike i to je bio, uz paradoks stavaka, glavni razlog Russellova nezadovoljstva teorijom tipova. Međutim, otkriće mehanizma eliminacije označavajućih fraza omogućilo je Russellu potpuno ukloniti skupove iz ontologije i izraze koji naizgled označavaju skupove shvatiti samo kao nepotpune simbole, bez ontologijske težine. Teorija bez razredā, koja je na taj način nastala, kaže nam Russell, "malo se razlikuje" od teorije tipova u *Principles* [101, str. 193]. No prividni entiteti viših tipova od tipa pojedinačnosti – skupovi i stavačne funkcije kao "svojstva" – uklonjeni su iz ontologije i nauk o neograničenoj varijabli time je, činilo se, sačuvan. Zamjenom notacije s različitim vrstama varijabla, "gdje notacija neizbježno sugerira opstojnost nečega označenoga s ϕ" [87, str. 155], notacijom sa samo jednom vrstom varijabla, tj. samo s individualnim ili entitetskim varijablama, uz uvođenje pojma ontologijske supstitucije te pokazivanjem na koji se način izrazi u staroj notaciji mogu prevesti unutar notacije samo s entitetskim varijablama, razvijena je supstitucijska teorija. Otkriće da se u teoriji mogu izvesti paradoksi stavaka, zajedno s uvjerenjem da se ti paradoksi mogu izbjeći samo nekom vrstom tipskoga razlikovanja stavaka, naveli su Russella također i na opće stavke primijeniti lijek koji je već uspješno primijenio na skupove i stavačne funkcije: uvesti tipsku hijerarhiju, ali ujedno pokazati da su izrazi za stavke koji nisu elementarni (tj. za stavke viših redova, čiji izrazi sadrže količitelje) samo nepotpuni simboli i eliminirati time opće

različitih uzajamno suprotstavljenih stajališta.

stavke iz pozadinske ontologije. Bez čvrstoga prihvaćanja nauka o neograničenoj varijabli, ništa od toga ne bi bilo potrebno: Russell je mogao uvesti ontologijsku hijerarhiju stavaka već 1903.

U *Principia*, na sličan način, uklanja Russell i elementarne stavke. Plauzibilno je tvrditi da je razlog za to upravo isti onaj koji ga je nagnao eliminirati opće stavke, a još prije toga i stavačne funkcije i skupove: pokušaj čuvanja logicističkoga nauka o neograničenoj varijabli. Pojedinačnošću se u *Principia* naziva sve što nije niti stavak niti stavačna funkcija [122, str. 51, 132]. To nam samo po sebi ne govori puno, ali, izlažući u $*12$ "strože" objašnjenje tipske hijerarhije, kaže Russell da se pojedinačnost može objasniti "kao nešto što zasebno postoji (*which exists on its own account*)" [122, str. 162], što sugerira da nije napustio shvaćanje individualnih varijabla kao neograničenih entitetskih varijabla. Uz eliminaciju stavaka, nema dobrih razloga niti tekstualne potkrjepe za tvrdnju da je stavačnim funkcijama vratio ontologijsku putovnicu. Stavačne su funkcije, uostalom, samo "nešto što sadrži varijablu x i izražava *stavak* čim je x-u pridružena vrijednost." [122, str. 38] Ako sam u pravu, stavačne su funkcije, baš kao i stavci, *za Russella* samo izrazi koji ne označavaju nikakve izvanjezične entitete poput svojstava i relacija. Je li ta pozicija uvjerljiva ili uopće koherentna sasvim je drugo pitanje koje nije tema ovoga rada.

(2) Na kraju prethodnoga potpoglavlja sugerirali smo da je Russellovo prihvaćanje načela poročnoga kruga povezano s njegovim shvaćanjem stavaka i stavačnih funkcija tek kao izrazā. Ovdje ćemo malo detaljnije obrazložiti tu tvrdnju.

No, najprije, odgovorimo na jedan očit prigovor tvrdnji da su stavačne funkcije tek nepotpuni simboli. Ako su stavačne funkcije nepotpuni simboli, ili tek otvorene formule, što su točno moguće vrijednosti varijabla koje nisu individualne? Shvatimo li funkcije realistički, kao pojmove, vrijednosti varijabla viših tipova su pojmovi. Ako su funkcije tek izrazi, vrijednosti su tih varijabla izrazi, zar ne? No zar to također ne krši nauk o neograničenoj varijabli? Konačno, i nepotpuni simboli, *kao* simboli, *jesu* nešto. Ako ti simboli ne mogu biti vrijednost individualnih varijabla – a funkcije, prema tipskoj hijerarhiji, nisu moguće vrijednosti individualnih varijabla – već su vrijednosti varijabla drugih tipova, individualne varijable *nisu* entitetske varijable, vrijednost kojih može biti bilo što što jest! Kazati da izrazi za stavačne funkcije nemaju nikakvo značenje sami po sebi, niti najmanje ne pomaže očuvanju nauka o neograničenoj varijabli – dok god su ti izrazi *nešto* i dok god nisu vrijednosti individualnih varijabla.

To bi doista bio dobar prigovor kada bi pokoličavanje višega reda bilo predmetno ili objektno pokoličavanje. No to nije način na koji treba shvatiti kvantifikaciju u *Principia Mathematica*. U slučaju količitelja višega reda, Russell ima na umu ono što danas nazivamo 'supstitucijska kvantifikacija'.[94] Poučci razgranate teorije tipova nisu tvrdnje *o* formulama i, općenito, izrazima jezika. Ako je ϕ neka funkcijska varijabla, tj. varijabla višega tipa, $\forall\phi F(\phi)$ ne treba razumjeti kao "za svaki nepotpun simbol tog i tog tipa vrijedi..." ili "za svaku otvorenu formulu...", već otprilike kao "svaki je stavak dobiven supstitucijom varijable ϕ odgovarajućom formulom istinit". To je smisao Russellove rekurzivne definicije istinitosti – pružiti supstitucijsku semantiku za neelementarne stavke i stavačne funkcije. Funkcijski izrazi, kao izrazi, kao entiteti, vrijednosti su individualnih varijabla, baš kao i bilo što drugo. Funkcijske (i stavačne) varijable nemaju vrijednosti u smislu u kojem imaju individualne varijable, već samo supstitucijske primjere! U tome su smislu samo individualne varijable "istinske" varijable. Russell, čini se, upravo supstitucijsku semantiku ima na umu kada kaže:

> Pod "stavačna funkcija" mislimo nešto što sadrži varijablu x i izražava (*expresses*) *stavak* čim je vrijednost pridružena x-u. To će reći, razlikuje se od stavka samo činjenicom da je višeznačna (*ambiguous*): sadrži varijablu kojoj nije pridružena vrijednost. [122, str. 38]

Umjesto shvatiti Russellove riječi kao nepažnju u razlikovanju stavačne funkcije od formule, valja ih uzeti puno doslovnije: stavačna je funkcija samo *izraz* koji sadrži slobodnu varijablu, a zamijenimo li varijablu u tome izrazu *izrazom* koji je supstitucijska vrijednost varijable, dobijemo *izraz* koji je stavak.

No, ako su stavci i stavačne funkcije doista samo izrazi, a supstitucijska semantika ono što Russell ima na umu u slučaju stavačnih i funkcijskih varijabla, načelo poročnoga kruga čini se sasvim opravdanim. Kako su primijetili mnogi, uključujući npr. Ramseyja [83], Gödela [32] i Quinea [82], načelo poročnoga kruga jednostavno djeluje prerestriktivno razumijemo li pokoličavanje u predmetnom smislu. Što nije u redu s nepriričnim definicijama? Zašto bi bio problem specificirati ili definirati neki predmet pokoličavanjem nad svim članovima skupa kojega je predmet u pitanju i sam član? Najmanji planet Sunčeva sustava jest jedan od planeta Sunčeva sustava; najviši muškarac u skupini jedan je od članova te skupine. Zašto stavačna funkcija ne

[94] Posebno uvjerljive argumente da se količitelje u *Principia* treba tumačiti supstitucijski nude Landini [59] i Klement [48]. Razlika je što Klement smatra da supstitucijska semantika vrijedi i u slučaju individualnih varijabla, dok Landini – ustrajući na središnjoj ulozi nauka o neograničenoj varijabli u Russellovu razumijevanju logike – smatra da u slučaju idividualnih varijabla, u skladu s Russellovim shvaćanjem individualnih varijabla kao istinskih, entitetskih varijabla, imamo predmetnu kvantifikaciju. U ovome radu priklanjamo se Landinijevoj interpretaciji.

bi mogla biti vrijednost varijable te iste stavačne funkcije? Odgovor leži u rekurzivnoj definiciji istinitosti kao supstitucijskoj semantici za stavačne funkcije. "Pokoličavati nad svim članovima nekoga skupa" u slučaju Russellovih stavačnih funkcija znači nešto drugo nego u slučaju specificiranja *predmeta* predmetnim pokoličavanjem nad nekim skupom predmetā. Kao prvo, ako su stavačne funkcije doista samo nepotpuni simboli, otvorene formule, onda se kvantifikacijom višega reda u sustavu *Principia* pokoličuje samo nad izrazima – nema drugih predmeta višega reda osim stavačnih funkcija i stavaka. Kao drugo, pokoličavati nad nekim skupom izrazā znači samo to da su ti izrazi supstitucijske vrijednosti količiteljem vezane varijable. Ako bi sama funkcija bila moguća vrijednost svoje varijable, to bi značilo da se ta funkcija – a to znači ta formula, taj izraz – može supstituirati na mjesto te varijable u toj istoj formuli. Na mjesto varijable mogli bismo, drugim riječima, upisati samu formulu koja tu varijablu sadrži: $F(\phi)$, $F(F(\phi))$, $F(F(F(\phi)))$, ... Međutim, stavačna je funkcija dobro definirana samo ako su *svi* njezini *supstitucijski primjeri* dobro definirani. Kako kaže Russell, "funkcija nije dobro definirana osim ako sve njezine vrijednosti nisu već dobro definirane" [122, str. 39]. No, prema Russellovoj definiciji istinitosti, stavci i stavačne funkcije dobro su definirani samo ako se u konačno mnogo koraka može doći do elementarnih stavaka i elementarnih stavačnih funkcija. Ako bi funkcija mogla biti vrijednost svoje varijable – dakle, ako bi se *formula* mogla supstituirati na mjesto svoje varijable – tada, u tom slučaju, ne bismo u konačno mnogo koraka došli do elementarnih stavačnih funkcija i ne bi svi supstitucijski primjeri funkcije bili dobro definirani. Imali bismo nešto poput primjera koji smo dali gore: $F(\phi)$, $F(F(\phi))$, $F(F(F(\phi)))$, ... Zato izraz koji sadrži vezanu varijablu ne može biti supstitucijska vrijednost te iste varijable – kako možemo prikladno parafrazirati načelo poročnoga kruga.

Dakle, da zaključimo, dok se načelo poročnoga kruga čini neopravdanim u slučaju predmetne semantike kvantifikacije, čini se opravdanim *ako* imamo posla sa supstitucijskom semantikom skiciranom Russellovom rekurzivnom definicijom istinitosti. No plauzibilnim se čini da bi supstitucijska semantika bila posljedica razumijevanja stavačnih funkcija kao tek izrazā ili formula. Stoga nam Russellovo prihvaćanje poročnoga kruga daje opravdanje za tvrdnju da Russell sam stavačne funkcije vidi upravo samo kao izraze, kao nepotpune simbole.

(3) Nažalost, za razliku od stavaka, Russell u *Principia* stavačne funkcije nigdje izravno ne opisuje kao nepotpune simbole. Umjesto toga, kaže nam da "pitanje naravi funkcije nipošto nije lagano" [122, str. 39]. Ipak, imamo nekoliko tekstualnih naznaka u *Principia* da doista i ondje stavačne funkcije razumije na taj način. Kao prvo, kako smo već spomenuli, želimo li Russellu

pripisati stav da su stavačne funkcije apstraktni izvanjezični entiteti, moramo ga optužiti za nemarno izražavanje i nedovoljno pažljivo razlikovanje stavačnih funkcija i njihovih izraza. No ako su stavačne funkcije doista ista stvar kao i funkcijski izrazi, ne postoji razlika na koju bi Russell morao paziti: govoriti o funkcijama i izrazima znači govoriti o jednoj te istoj stvari. Ako su stavačne funkcije istovjetne svojim izrazima, Russell ne griješi kada kaže da funkcija, a ne tek izraz funkcije, sadrži varijablu. Kao drugo, i povezano s prethodnim, Russell ponegdje u *Principia* o stavačnim funkcijama izričito kaže da su izrazi. Na primjer, elementarne stavačne funkcije opisuje kao izraze [122, str. 92], a načelo poročnoga kruga parafrazira u $*12$ tako što kaže da "bilo koji izraz koji sadrži vezanu varijablu ne smije biti u području te varijable, tj. mora pripadati različitom tipu." [122, str. 161] Kao treće, za stavačne funkcije bez vezanih varijabla rabi izraz 'matrica' (*matrix*), što je izraz koji u supstitucijskoj teoriji, prisjetimo se, rabi za određenu vrstu nepotpunih simbola.

Izravan odgovor na pitanje kako u vrijeme pisanja *Principia* razumije stavačne funkcije Russell daje u *My Philosophical Development* [98, str. 124]:

> Whitehead i ja mislili smo o stavačnoj funkciji kao o izrazu koji sadrži neodređenu (*undetermined*) varijablu i postaje obična rečenica čim se vrijednost pridruži varijabli[.]

Moglo bi se, naravno, prigovoriti da je taj odgovor dan nekoliko desetljeća prekasno da bi nam, sam po sebi, odgovorio na pitanje kako treba tumačiti stavačne funkcije u razgranatoj teoriji tipova. No, uzevši u obzir da je, nekoliko godina nakon *Principia*, Russell vrlo izravan i dosljedan u pogledu da su stavačne funkcije tek izrazi koji su, sami za sebe, bez značenja, mislim da nema razloga ne vjerovati mu. Na primjer, u *Introduction to Mathematical Philosophy*, objavljenoj 1919., Russell piše:

> "Stavačna funkcija" jest, u stvari, izraz koji sadrži jednu ili više neodređenih sastavnica, takvih da, kada su vrijednosti pridružene tim sastavnicama, izraz postaje stavak. [...] Ne moramo pitati, niti pokušavati odgovoriti na pitanje: "Što *jest* stavačna funkcija?" Stavačna funkcija koja stoji sama može se uzeti kao puka shema, puka ljuska, prazna posuda za značenje, ne nešto već smisleno (*significant*). [94, str. 155-157]

No, svakako najbolji ključ za tumačenje stavačnih funkcija u razgranatoj teoriji tipova, ostavio nam je Russell u "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", objavljenom dvije godine prije prvoga sveska prvoga izdanja *Principia Mathematica*. A ondje Russell jasno povezuje razgranatu teoriju tipova sa svojom supstitucijskom teorijom i izričito kaže da varijable viših tipova – dakle, sve varijable osim individualnih – rabi tek zbog njihove tehničke pogodnosti, ali da su teorijski nepotrebne:

> Funkcije različitih redova mogu se dobiti iz stavaka različitih redova pomoću metode *supstitucije*. [...] Na taj način možemo izbjeći vezane varijable osim individualnih i stavke različitih redova. [...] Iako je *moguće* zamijeniti funkcije matricama, i iako taj postupak uvodi izvjesnu jednostavnost u objašnjenje tipova, tehnički je nepogodan. Tehnički, pogodno je zamijeniti prototip p s ϕa i zamijeniti $p/a; x$ s ϕx; time ondje gdje bi se, ako bi se rabile matrice, p i a pojavile kao vezane varijable, imamo sada ϕ kao našu vezanu varijablu. Da bi ϕ bilo legitimno kao vezana varijabla, nužno je da njezine vrijednosti budu ograničene na stavke nekoga jednoga tipa. [89, str. 238-239]

Iako ne opisuje detalje prevođenja izrazā razgranate teorije tipova u jezik supstitucijske teorije, vidimo da teoriju tipova u "Mathematical Logic" Russell vidi samo kao notacijski pogodniji oblik supstitucijske teorije, u kojoj su stavačne funkcije doista samo nepotpuni simboli. Kako smo kazali gore, teorija tipova izložena u "Mathematical Logic" više-manje odgovara onoj u uvodu *Principia*, s razlikom što u *Principia* niti elementarni stavci nisu više entiteti. No eliminacija stavaka ničime nije natjerala Russella oživjeti stavačne funkcije kao zasebnu vrstu entiteta. Dakle, čini se opravdanim zaključiti da su stavačne funkcije u *Principia Mathematica* također samo izrazi i da time razgranata hijerarhija tipova nije ontologijska hijerarhija.[95]

Sažmimo rečeno. Postoje dobri razlozi smatrati da Russell stavačne funkcije u *Principia Mathematica* razumije samo kao nepotpune simbole, izraze koji sami po sebi ne označavaju ništa. Prvi je razlog to što je logika *Principia* nastavak prethodnih Russellovih pokušaja rješavanja paradoksā, pokušaja koje su dosljedno obilježavale dvije glavne značajke: vjernost nauku

[95] Istina je da, za razliku od "Mathematical Logic", *Principia* nigdje ne upućuju na supstitucijsku teoriju niti govore o njezinu odnosu spram razgranate teorije tipova. To je razumljivo, uzevši da Russellova supstitucijska teorija čitateljima ne bi bila široko poznata: glavni rad iz supstitucijske teorije, "On the Substitutional Theory of Classes and Relations", povučen je zbog p_0/a_0 paradoksa, "Les paradoxes" objavljen je samo na francuskome, a "On Some Difficulties", u kojem se supstitucijska teorija još uvijek naziva tek 'teorija bez razredā', sadrži samo grubu skicu. S druge strane, jasno je da je izostanak izričita spominjanja supstitucijske teorije u *Principia* samo po sebi razlog za opreznost u tumačenju kako, u vrijeme samoga rada na *Principia*, Russell razumije odnos između supstitucijske teorije i razgranate teorije tipova.

o neograničenoj varijabli i eliminacija iz ontologije onih entiteta koji, pod prijetnjom protuslovlja, nisu mogli biti vrijednost individualne varijable. Drugi je razlog što, shvatimo li stavačne funkcije, zajedno sa stavcima, kao puke izraze i primijenimo li supstitucijsku semantiku za pokoličavanje viših redova, imamo, čini se, objašnjenje Russellova prihvaćanja načela poročnoga kruga i razgranate tipske hijerarhije. Treći je razlog što nam sam Russell, ne u samome tekstu *Principia*, ali i prije i nakon nje, kaže da stavačne funkcije razumije samo kao izraze.

Samo još jedna napomena za kraj ovoga poglavlja. Kako smo već kazali, način na koji Russell razumije stavačne funkcije ne mora nužno biti i najbolji ili filozofijski najplodniji način za razumjeti ih. Iako smo argumentirali da Russell stavačne funkcije, kao i stavke, doista vidi samo kao izraze ili formule, nismo time tvrdili da su Russellovi razlozi za to ujedno i *dobri* razlozi. Ne ćemo ovdje pokušavati te razloge procijeniti, ali upozorit ćemo na dvije stvari.

Kao prvo, vidjeli smo da stavci i stavačne funkcije, ako i jesu nepotpuni simboli, nisu to u istome smislu u kojem su npr. razredi i određeni opisi nepotpuni simboli. *Simboli* za razrede i određene opise ne nalaze se u osnovnome rječniku sustava *Principia* i time se ne javljaju u formulama sustava bez definicijskih pokrata: na njih možemo gledati jednostavno samo kao na notacijski pogodne skraćenice. To, čini se, ne vrijedi za simbole za stavke i funkcije: iskazi i otvorene formule *nisu* uklonjeni iz jezika. Drugim riječima, dok je eliminacija razredā i određenih opisa relevantna za simbolizam i sam logički sustav razgranate teorije tipova, eliminacija stavaka i stavačnih funkcija tek je dio filozofijske metateorije koja, ako smo u pravu naglašavajući ulogu nauka o neograničenoj varijabli, ima ulogu pokazati da je razgranata teorija tipova filozofijski zadovoljavajuća – filozofijski zadovoljavajuća za Russella, to će reći. Međutim, to tada znači da, ako sami ne ustrajemo na očuvanju nauka o neograničenoj varijabli i ne mislimo da je veliki problem dopustiti različite vrste varijabla za različite vrste entitetā, možemo jednostavno odbaciti pozadinsku Russellovu metafiziku, a ujedno zadržati sam sustav razgranate teorije tipova. Štoviše, ne slažemo li se s Russellovom analizom stavaka i stavačnih funkcija kao nepotpunih simbola i vratimo li stavke i stavačne funkcije kao punopravne članove ontologije razgranate teorije tipova, možemo odbaciti supstitucijsku semantiku za količitelje viših redova i time smjesta pojednostaviti tipsku hijerarhiju uklanjanjem tipskoga razlikovanja prema broju količiteljā. To je razlikovanje ionako neovisno o načelu poročnoga kruga i nema nikakvu ulogu u izbjegavanju paradoksā.

Naravno, prijedlog bi sada mogao biti da, kada već iznova uvodimo razliku između funkcijskih izrazā i funkcija samih i vraćamo predmetnu kvantifikaciju, odemo i korak dalje i jednostavno odbacimo načelo poročnoga kruga i zabranu nepriričnih definicija. Drugim riječima, da umjesto razgranate teorije prigrlimo jednostavnu teoriju tipova. U idućemu poglavlju argumentirat ćemo da, pod određenim razumijevanjem intenzionalnih entiteta, razgranatoj teoriji tipova ipak valja dati prednost kao formalnoj teoriji pojma.

Kao drugo, primijetimo (još jednom) da Russell, ako smo u pravu, iako stavačne funkcije razumije samo kao izraze ili otvorene formule, *nije* nominalist. Pojmovi, univerzalije, apstraktne ideje – nisu prognani zajedno sa stavcima i stavačnim funkcijama. Samo su, kao i sve drugo što postoji, "tek" pojedinačnosti, vrijednosti individualnih varijabla. Naravno, to znači da stavačne funkcije nisu pojmovi niti svojstva. Čak niti elementarne stavačne funkcije, npr. "x je crven", nisu isto što i jednostavni pojmovi, npr. "crveno". Problem je sada što se čini prirodnim stavačne funkcije shvatiti kao pojmove ili svojstva. Russell to sam potvrđuje kada stavačne funkcije naziva svojstvima i pirocima. Taj jaz između pojmova s jedne strane i stavačnih funkcija s druge djeluje barem neobično. No taj je jaz posljedica nauka o neograničenoj varijabli. Bez nauka o neograničenoj varijabli, ne bi bilo razloga ustrajati na tako neobičnoj razlici. To možda sugerira da nije trebalo ustrajati na nauku o neograničenoj varijabli.

3 KUMULATIVNA INTENZIONALNA RAZGRANATA TEORIJA TIPOVA

3.1 Motivacija

U raspravi o Russellovoj razgranatoj teoriji tipova tvrdili smo da Russell u *Principia Mathematica* stavačne funkcije, kao i stavke, razumije samo kao *izraze*, kao tzv. nepotpune simbole, koji sami po sebi nemaju značenje, u smislu da ne označavaju nekakve zasebne izvanjezične entitete poput svojstava, atributa ili pojmova. No, također smo tvrdili da postoje ozbiljni filozofijski problemi s takvim shvaćanjem stavačnih funkcija i da, samim time, tumačenje prema kojem bi se stavačne funkcije shvatile kao "pravi" izvanjezični intenzionalni entiteti, a razgranata hijerarhija kao ontologijska hijerarhija, ima određenih filozofijskih prednosti. U ovome ćemo poglavlju istražiti mogućnost jednoga takvoga tumačenja i na temelju razgranate teorije tipova pokušati izgraditi nacrt formalne teorije intenzionalnih entiteta. Štoviše, cijelo se poglavlje može shvatiti takoreći kao reakcija na Russellov eliminacijski projekt u *Principia*. Potpuno ćemo odbaciti nauk o neograničenoj varijabli i, umjesto toga, u teoriji koju ćemo kroz poglavlje graditi, prihvatiti punokrvnu "platonističku" ontologiju "stavačnih funkcija".

Osnovna ideja za semantiku teorije nadahnuta je intenzionalnom jednostavnom teorijom tipova Melvina Fittinga. Fitting u *Types, Tableaus, and Gödel's God* [21] semantiku za svoju inačicu teorije tipova izgrađuje pomoću tzv. poopćenih Henkinovih modela. Kako je poznato, teorija tipova – kao i logike višega reda općenito – nije potpuna u klasičnim modelima. Leonu Henkinu [42] dugujemo dokaz potpunosti teorije tipova za opće modele, kako je nazvao svoju generalizaciju klasičnih modela. No Henkin je ujedno usput spomenuo mogućnost određene intenzionalne generalizacije općih modela. Tu ideju preuzima Fitting i za svoju teoriju tipova gradi semantiku u kojoj predmeti u domenama nisu, kao u klasičnim i Henkinovim modelima, skupovi, već intenzionalni entiteti.[96] Ono što Henkin naziva 'opći modeli', Fitting naziva 'Henkinovi modeli', a intenzionalna poopćenja Henkinovih modela 'poopćeni Henkinovi modeli'. Tu ćemo ideju (i nazive) preuzeti i mi, no uz nekoliko važnih izmjena kako bismo teorijom

[96]Takve su semantike relativno rijetke, što je razumljivo uzevši u obzir da su intenzionalni predmeti rijetko u središtu zanimanja matematičara. Andrews [3] daje primjer konstrukcije intenzionalnoga Henkinova modela. Prikaz teorije tipova u Fittingovoj inačici (iako bez intenzionalnosti) može se naći u Kovač [53], zajedno s usporedbom klasičnih i Henkinovih modela.

vjernije formalizirali određene filozofijske poglede na narav intenzionalnih entiteta. Te su promjene, između ostalih, uvođenje kumulativnosti i formalizacija razgranate umjesto jednostavne teorije tipova.

Sustav koji gradimo u ovom poglavlju nazvat ćemo ‘KIRTT’, što je skraćenica za ‘kumulativna intenzionalna razgranata teorija tipova’. Motivacija za KIRTT puno je skromnija od Russellove motivacije iza teorije u *Principia*. Nije nam cilj izložiti nekakvu univerzalnu logičku teoriju ili univerzalan logički jezik i, posebno, nije cilj pokazati da se cjelokupna matematika može izgraditi unutar te teorije. Cilj nam je tek, vrlo jednostavno, pokušati formalizirati određene metafizičke intuicije o naravi intenzionalnih entiteta. Te intuicije ne ćemo pokušati filozofijski obraniti, već samo formalno opisati. Mogućnost formalizacije metafizičkih stajališta nije dovoljna da bismo tvrdili da su ta stajališta plauzibilna (kamoli istinita), ali jest dobar kriterij njihove suvislosti. Uspješna formalizacija daje nam, recimo to tako, racionalno dopuštenje za shvatiti metafizičku poziciju ozbiljno. Stoga ne ćemo postaviti ambiciozan zahtjev da KIRTT mora nekako sadržavati vlastitu metateoriju – čak i ako Russell doista jest nešto poput toga zahtijevao od sustava u *Principia* – niti ćemo postaviti ikakva ograničenja u uporabi matematičkih sredstava u opisu sustava. Naprotiv, uzet ćemo kao danu standardnu aksiomatsku teoriju skupova ZFC i njezine rezultate po potrebi slobodno koristiti i u opisu sintakse i, posebno, u opisu semantike za KIRTT. Na primjer, jedan mogući razlog zašto Russellova teorija tipova nije kumulativna to je što bi, *prima facie*, izrada kumulativnoga sustava unaprijed pretpostavljala istinitost određenih tvdnja o rednim brojevima, što se pak čini nedopustivim u kontekstu projekta logicističkoga *utemeljenja* matematike. Kako KIRTT nije logicistički pothvat, nema niti najmanjega problema pretpostavimo li teoriju rednih brojeva kao unaprijed danu.

Opisat ćemo KIRTT govoreći samo o svojstvima, zanemarivši relacije. Drugim riječima, jezik teorije, koji ćemo prikladno nazvati ‘$\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$’, sadržavat će samo jednomjesna priročna slova i apstrakte. Rezultat bi trebalo biti jednostavno poopćiti i na relacije, a bit će nam ovako lakše uočiti osnovne ideje i intuicije koje motiviraju teoriju. Naravno, samim će tim teorija biti i tehnički jednostavnija, posebice stoga što se na taj način, kako ćemo vidjeti, razlika između tipova svodi na jednostavnu razliku između redova. Također, olakšat će nam to usporedbu KIRTT-a s ekstenzionalnim teorijama skupova.

Dakle, kako samo ime sugerira, želimo izgraditi teoriju koja je kumulativna, intenzionalna i razgranata, radije nego jednostavna, teorija tipova. Koji su razlozi za to i što to uopće znači? Koje su to metafizičke intuicije koje bi teorija s tim svojstvima trebala formalno opisati?

(1) *Intenzionalnost*. Za početak pojasnimo u kojemu je smislu teorija koju gradimo intenzionalna. Želimo teoriju tipova u kojoj će oznake (*terms*) referirati na intenzionalne entitete, ne na skupove. Te ćemo intenzionalne entitete u ovom poglavlju nazivati 'pojmovi', 'atributi' i 'svojstva', zanemarivši značenjske razlike koje ti izrazi mogu imati u nekim drugim kontekstima. Glavna je pozadinska intuicija sljedeća: svakomu pojmu pripada odgovarajući opseg ili ekstenzija, skup predmeta na koje se pojam odnosi; dva pojma mogu imati isti opseg, tj. odnositi se upravo na iste predmete, ali ne biti ujedno *isti* pojam. Odnos između pojma i predmeta na koji se pojam odnosi utoliko se bitno razlikuje od odnosa između skupa i predmeta koji je član toga skupa. Skupovi su posve ekstenzionalni entiteti: imaju li dva skupa sasvim iste elemente, radi se o jednome te istome skupu. Zbog toga se ekstenzionalne teorije, u kojima oznake referiraju na skupove, čine neprikladnima za opis intenzionalnih entiteta i njihovih odnosa. Naša bi teorija trebala dopustiti da postoje, da se poslužimo izlizanim primjerom, pojmovi poput "razumska životinja" i "bespernati dvonožac", koji se, po pretpostavci, oba odnose na sva i samo na ljudska bića, a koji su svejedno različiti predmeti.

Modalna logika pruža jedan način na koji se može pokušati formalno opisati intenzionalni karakter pojmova.[97] Ideja je tu da koekstenzivni pojmovi nisu, doduše, nužno istovjetni, ali da *nužno* koekstenzivni pojmovi jesu. Drugim riječima, ako i samo ako dva pojma imaju isti opseg u *svakome* mogućemu svijetu, radi se o jednome te istome pojmu. Razlog zašto "razumska životinja" i "bespernati dvonožac" nisu istovjetni pojmovi to je što postoji mogući svijet u kojemu se njihovi opsezi razlikuju. Međutim, problem je s tim prijedlogom to što se čini da je sasvim moguće da dva pojma imaju nužno isti opseg, a ipak budu međusobno različiti. Na primjer, pojmovi "geometrijski lik s trima stranicama" i "geometrijski lik s trima vrhovima" u svakome se mogućemu svijetu odnose na iste predmete, ali ipak se, intuitivno, radi o različitim pojmovima. U svakome slučaju, "okrugli kvadrat" i "oženjeni neženja" nužno imaju isti opseg – naime, prazni skup – a očito nisu jedan te isti pojam. Ako sam u pravu, niti nužna istovjetnost njihovih opsega nije dovoljan uvjet za istovjetnost pojmova. Pojmovi se uzajamno razlikuju ne samo prema predmetima koji ih oprimjeruju već i prema onome što se tradicionalno naziva 'sadržaj pojma', a što bismo također mogli nazvati 'značenje', 'smisao' ili 'intenzija pojma'.

Naravno, na pitanje *što* je točno sadržaj, smisao ili intenzija pojma nije jednostavno odgovoriti. No, uzevši primjere dane u prethodnom odlomku, izgleda da bi odgovor mogao ležati u

[97] Fittingov sustav FOIL ([22], [23]) dobar je primjer modalne logike intenzionalnih predmeta. Kovač [52] također rabi modalnu logiku prvoga reda za formalizaciju intenzionalnih predmeta u kontekstu logike (protuslovnih) vjerovanjā.

tome što se pojam geometrijskoga lika s trima stranicama i pojam geometrijskoga lika s trima vrhovima razlikuju međusobno u tome od kojih su drugih pojmova oni sami "sastavljeni" ili koje pojmove u sebi "sadrže". Pojam stranice u nekome je smislu "dio" prvoga, ali ne i potonjega; "tvori" ili "konstituira" prvi, ali ne i drugi pojam. Nešto slično, dakako, vrijedi i za pojmove okrugloga kvadrata i oženjenoga neženje: ti pojmovi "uključuju" i "pretpostavljaju" različite pojmove, različite pojmove imaju kao svoje "sastavnice". Količina navodnika u prethodnim rečenicama dovoljno govori da rečeno nije mišljeno kao precizna analiza, već tek pokušaj artikulacije pomalo mutnih intuicija. I s tom ogradom, čak i ako bi se moglo dati jasnije značenje gornjim metaforama, ostaje pitanje kako shvatiti intenzionalni sadržaj, nazovimo ih tako, jednostavnih ili nesastavljenih pojmova – kao i pitanje, uostalom, postoje li uopće takvi predmeti. Kako bilo, rekli smo već, cilj nam je ovdje tek opisati određene intuicije, ne dati njihovu filozofijsku obranu. Što god bio intenzionalni sadržaj pojma, formalna teorija pojma morala bi dopustiti da pojmovi s istovjetnim opsezima – štoviše, pojmovi s nužno istovjetnim opsezima – nisu sami istovjetni.

U kojemu bi smislu tada KIRTT, kao formalna teorija, trebala biti intenzionalna teorija? U standardnoj ekstenzionalnoj semantici teorije tipova, spomenuli smo, tumačenje i vrjednovanje varijabla oznakama, uz izuzetak oznaka najnižega tipa, pridružuju skupove. U semantici za KIRTT, s druge strane, predmeti koje ćemo pridruživati oznakama jezika ne će biti skupovi. Malo preciznije, dopustit ćemo, na primjer, da funkcija tumačenja konstantama jezika pridružuje posve *proizvoljne* predmete, tj. ne zahtijevajući da su ti predmeti skupovi, ali koji će pritom morati zadovoljavati neke uvjete za koje predteorijski očekujemo da ih zadovoljavaju intenzionalni entiteti poput pojmova ili svojstava. Uvest ćemo tako posebnu funkciju koja će svakomu predmetu (osim onih koji predstavljaju entitete koji sami nisu pojmovi, tj. osim predmetima najniže razine hijerarhije) pridružiti neki skup predmeta kao njegovu ekstenziju, a ujedno dopustiti da ta funkcija nije injektivna. Značit će to da koekstenzivnost predmeta koje pridružujemo oznakama ne povlači njihovu istovjetnost, tj. ne će u našem sustavu vrijediti nešto poput aksiomatske sheme ekstenzionalnosti, što bi morao biti slučaj ako bi naši predmeti bili skupovi:

$$\forall\phi\forall\psi(\forall x(\phi x \leftrightarrow \psi x) \leftrightarrow \phi = \psi).$$

Već je to dovoljno da bismo teoriju, barem u nekome minimalnome smislu, smatrali intenzionalnom. S druge strane, samim tim što je relacija između predmetā i njima pridruženih ekstenzija funkcijska, osiguran je očit uvjet da iz istovjetnosti pojmova mora slijediti njihova koekstenzivnost:

$$\forall\phi\forall\psi(\phi = \psi \to \forall x(\phi x \leftrightarrow \psi x)).$$

Naravno, htjeli bismo imati u rukama kriterij istovjetnosti i za intenzionalne predmete. Koekstenzivnost je neprikladan kriterij istovjetnosti za intenzionalne entitete, ali leibnizovski kriterij istovjetnosti nerazlučivoga plauzibilno je rješenje, za intenzionalne entitete kao i za bilo što drugo. Stoga možemo jednostavno uvesti odgovarajuću inačicu sljedeće sheme:

$$\forall x\forall y(\forall\phi(\phi x \leftrightarrow \phi y) \leftrightarrow x = y).$$

(2) *Kumulativnost*. Dalje, želimo teoriju koja je kumulativna. Što to znači? Način na koji rabimo neformalne jezike poput hrvatskoga sugerira da, barem u nekim slučajevima, smatramo da i konkretni i apstraktni predmeti, i pojedinačnosti i svojstva, mogu posjedovati isto svojstvo. Sokrat je dobar, mudrost je dobra. Sve što jest, jedno je. Stoga, jednostavno, želimo teoriju u kojoj se isto svojstvo može pripisati i pojedinačnostima i svojstvima. Želimo moći u našem jeziku iskazati tvrdnju da su i Sokrat i mudrost dobri.

Tomu bi se moglo prigovoriti da se, kada naizgled pripisujemo pojedinačnosti neko svojstvo koje pripisujemo i njezinu svojstvu, tek izražavamo eliptično. Na primjer, kažemo li da je Sokrat dobar, možda zapravo imamo na umu to da je dobra njegova mudrost ili, recimo, njegova hrabrost? Kažemo li da je Sokrat dobar, možda hoćemo reći samo to da Sokrat oprimjeruje ta i ta svojstva? Naravno, moguće je da je tomu tako. No, barem se *prima facie* čini da neka svojstva ispravno pripisujemo predmetima smještenima na različitim razinama ontologijske hijerarhije. I pojedinačnosti i svojstva imaju svojstvo da oprimjeruju neko svojstvo; i pojam dobra i pojam mudrosti imaju svojstvo da su oprimjereni nekim predmetom. Brojati možemo i generale i njihova svojstva. Možda bi ispravna filozofijska analiza pokazala da se samo prividno radi o istim svojstvima, da je riječ zapravo tek o nečemu poput Russellove sustavne višeznačnosti – otprilike na način na koji, prema Russellu, kazati da je elementarni stavak istinit nije ista stvar što i kazati da je istinit neki opći stavak. Svejedno, pokušati izgraditi teoriju koja će gramatički dopustiti pripisivanje istoga svojstva predmetima različitih razina moglo bi biti korisno već samim tim što bi nam takva teorija mogla pokazati je li pripisivanje istoga svojstva i pojedinačnostima i njihovim svojstvima, na primjer, uopće smisleno. Također bi nam mogla pokazati koje su relativne prednosti i nedostatci nekumulativne i kumulativne hijerarhije.

Drugi razlog za dopuštanje kumulativne hijerarhije u teoriji tipova ne tiče se izravno samoga sustava KIRTT, ali mogao bi biti važan nekomu tko bi htio, poput Russella, teoriju tipova, radije nego teoriju skupova, učiniti utemeljujućom matematičkom disciplinom i pokazati da se teorija skupova može izvesti iz teorije stavačnih funkcija. Poistovjetimo li skupove sa stavačnim funkcijama ili s ekstenzijama stavačnih funkcija, a pritom zahtijevamo da svi argumenti stavačnih funkcija moraju biti istoga tipa, slijedi da ne postoje skupovi "mješovitoga tipa", tj. ne postoje skupovi koji kao svoje članove mogu sadržavati predmete koji su međusobno različitoga tipa. Skup čiji su elementi pojedinačnosti ne može sadržavati svojstva ili skupove. Iako tehnički to nije nepremostiv problem,[98] standardne teorije skupova pokazuju da nema nikakvih razloga za uskraćivanje ontologijskih prava mješovitim skupovima. To sugerira da možda nema presudnih razloga niti za isključenje "mješovitih pojmova".

U kojemu bi smislu KIRTT bila kumulativna teorija? Standardne teorije tipova, bilo jednostavne bilo razgranate, nisu kumulativne.[99] Prisjetimo se kako izgleda jednostavna teorija tipova. Ako određeno svojstvo pripada nekoj pojedinačnosti, onda ono ne može pripadati nekom svojstvu. Takva svojstva nazovimo svojstvima prvoga reda. Ako se pak svojstvo odnosi na svojstva prvoga reda, ono se ne odnosi na pojedinačnosti, već *samo* na svojstva prvoga reda. Ta svojstva tada nazovimo svojstvima drugoga reda. Analogno imamo svojstva trećega reda, četvrtoga reda, itd. Dobivamo time nekumulativnu hijerarhiju svojstava, tj. hijerarhiju redova svojstava od kojih se svako odnosi samo na predmete *neposredno* nižega reda: predmeti reda 1 odnose se samo na predmete reda 0, predmeti reda 2 samo na predmete reda 1, itd. Sintaktički se to izražava u zahtjevu da, na primjer, ako je τ^t oznaka reda t, a υ^u oznaka reda u, onda je $\tau^t(\upsilon^u)$ formula ako i samo ako $t = u + 1$. Semantički, u tome što tumačenje (ili, ako je riječ o intenzionalnoj teoriji tipova, funkcija ekstenzije) predmetu reda t pridružuje (kao ekstenziju) skup čiji su članovi samo predmeti reda $t - 1$, ali ne i predmeti nižih redova. Kako smo vidjeli, u Russellovoj razgranatoj teoriji tipova stvar je malo složenija, utoliko što moramo uzeti u obzir

[98] Neka je a pojedinačnost, b neki skup pojedinačnosti, a c neki skup skupova pojedinačnosti. Tada, doduše, ne bi postojao skup $\{a, b, c\}$, ali lako ga je simulirati skupom $\{\{\{a\}\}, \{b\}, c\}$, čiji su elementi svi istoga tipa. Međutim, otpala bi, na primjer, von Neumannova definicija skupa rednih brojeva kao $\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, ...\}$.

[99] Iznimka je Churchova formalizacija razgranate teorije tipova u [14], čiju smo definiciju r-tipa iskoristili u prikazu razgranate hijerarhije tipova u prethodnom poglavlju. Imamo li dva r-tipa različite razine, ali s istim r-tipovima argumenata, tada za r-tip niže razine kažemo da je izravno niži (*directly lower*) od odgovarajućega r-tipa više razine. Recimo, $\langle 0\rangle\backslash 3$ izravno je niži od $\langle 0\rangle\backslash 7$, a $\langle\langle 0\rangle\backslash 3, 0\rangle\backslash 1$ izravno je niži od $\langle\langle 0\rangle\backslash 3, 0\rangle\backslash 2$. Churchov je sustav kumulativan u tome smislu što područje mogućih vrijednosti varijable određenoga r-tipa uključuje područja vrijednosti varijabla izravno nižega tipa. Također, sintaktički, varijable određenoga r-tipa mogu se supstituirati oznakama bilo kojega izravno nižega r-tipa. No primijetimo da tipovi argumenata moraju biti isti. Znači to da, na primjer, varijabla za funkcije pojedinačnosti koja je razine 2 može kao vrijednost imati funkciju pojedinačnosti koja je razine 1, ali ne i pojedinačnost.

razliku između tipova i redova, ali osnovna je struktura ista: svojstvo koje se odnosi na predmete određenoga tipa ne može se pripisati predmetima drugih tipova.

S druge strane, namjera nam je izgraditi teoriju u kojoj će se predmeti reda 1 odnositi na predmete reda 0, predmeti reda 2 na predmete reda 1 *i* predmete reda 0, itd. To jest, želimo da je u jeziku $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ naše teorije $\tau^t(\upsilon^u)$ formula čak i ako je $u < t - 1$, a da funkcija ekstenzije predmetu reda t pridružuje skup kojega elementi mogu biti i reda manjega od $t - 1$. No, ako se dano svojstvo može odnositi na predmete svih redova nižih od reda toga svojstva, također želimo moći u našemu jeziku kazati da se neko svojstvo doista odnosi na *sve* predmete koji su nižega reda od reda toga svojstva, a ne samo na sve predmete *neposredno* nižega reda. Općenito, želimo moći reći da je neka formula zadovoljena svim predmetima svakoga reda manjega ili jednakoga danomu redu. Stoga će, na primjer, pokoličena formula $\forall \mathbf{x}^t\phi$ biti istinita ako i samo ako je formula ϕ zadovoljena svakim predmetom koji je reda manjega ili jednakoga t. Drugim riječima, vrjednovanja varijabla svakoj će varijabli reda t pridruživati predmet koji je reda manjega ili jednakoga t. Pravila će dokazivanja pak dopustiti da iz neke formule $\forall \mathbf{x}^t\phi$ izvedemo formulu $\phi\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$, tj. formulu koja je rezultat supstitucije oznake υ^u na mjesto varijable $\mathbf{x}^t$, čak i ako je $u < t$. U tom je smislu KIRTT kumulativna teorija.

Kumulativnost, nažalost, ima očitu nezgodnu posljedicu što, ako je ϕ formula, υ^u oznaka reda u i $u \leq t$, nije svaki izraz koji je rezultat supstitucije $\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$ u ϕ formula. Na primjer, iz formule $\forall x^3 x^3(c^1)$ možemo izvesti $d^2(c^1)$, ali ne i $e^0(c^1)$. Izraz $e^0(c^1)$ jednostavno nije formula. Nekumulativne teorije nemaju taj problem jer se supstitucijom varijabla uvijek zamjenjuje oznakom istoga reda kao i red varijable pa, ako je ϕ formula, υ^u oznaka reda u i $u = t$, izraz $\phi\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$ također je formula. Stoga ćemo u pravilima dokazivanja morati eksplicitno postaviti zahtjev da $\phi\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$ slijedi iz $\forall \mathbf{x}^t\phi$ samo ako je $\phi\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$ formula.

(3) *Razgranatost*. Konačno, želimo razgranatu, a ne jednostavnu teoriju tipova. Intenzionalnost i kumulativnost moguće je imati i u jednostavnoj teoriji tipova, ali razgranata je teorija bliža određenim intuicijama o naravi intenzionalnih entiteta koje bismo htjeli uhvatiti unutar naše formalizacije. Iako te intuicije nije jednostavno artikulirati, pokušat ćemo opisati o čemu je otprilike riječ.

Korisno je ovdje najprije opisati poznatu Gödelovu kritiku Russellova načela poročnoga kruga. Gödel [32, str. 127] kaže da Russell u *Principia* nudi ne jedno već tri različita načela. Prema prvome, nijedan entitet ne može biti *definirljiv* samo pomoću sveukupnosti kojoj sam pripada; prema drugome, nijedan entitet ne može *uključivati* sveukupnost kojoj pripada; prema trećemu, nijedan entitet ne može *pretpostavljati* sveukupnost kojoj pripada. Samo prvo načelo, tvrdi Gödel, zabranjuje nepriričné definicije i vrijedi samo ako su entiteti o kojima je riječ proizvod naših konstrukcija. Definicija je tada opis konstrukcije entiteta, a opis konstrukcije zasigurno ne smije, referajući na sveukupnost kojoj entitet pripada, referirati na sam entitet koji konstruiramo. To prvo načelo time je ujedno i najmanje plauzibilno: ako entiteti u pitanju (stavačne funkcije, svojstva, pojmovi) postoje neovisno o nama i našim konstrukcijama, zašto bi bio problem opisati ih i specificirati referiranjem na neku sveukupnost kojoj pripadaju? Drugo i treće načelo, smatra Gödel, puno su plauzibilnija načela, posebice treće, "ako 'pretpostavlja' znači 'pretpostavlja za opstojnost'" [32, str. 128], tj. ako se tim načelom želi reći da entitet ne može ontološki ovisiti o cjelini kojoj pripada. Gödel razlikuje dvije koncepcije pojma. Za pojmove u konstruktivističkome smislu svake dvije različite definicije definiraju različite pojmove. No pojmovi shvaćeni u realističkome smislu, kao objektivno, o nama neovisno opstojeći entiteti, smatra, mogu biti definirani na različite načine, uključujući i pomoću nepriričnih definicija.

Međutim, čini se da je moguće braniti tvrdnju da bi nešto poput načela poročnoga kruga, u svim trima formulacijama, moralo vrijediti i za realistički shvaćene pojmove. Pojmove ne moramo razumjeti konstruktivistički da bismo smatrali da je *bitno* obilježje pojma njegovo značenje, smisao, određeni intenzionalni sadržaj, a da to značenje ovisi o značenju pojmova koji ga definiraju – ili, u Russellovu smislu, da *uključuje* i *pretpostavlja* to značenje. Pojam razumske životinje nije samo definiran pomoću pojma životinje i pojma razuma, već je značenje tih pojmova uključeno u značenje definiranoga pojma i, štoviše, time pojam razumske životinje doista pretpostavlja za svoju opstojnost pojmove koji ga definiraju. Što točno znači imati sva svojstva velikoga generala ovisi o tome koja su to svojstva koja imaju veliki generali: ako su veliki generali logicisti, sadržaj pojma "imati sva svojstva velikoga generala" različit je nego ako su veliki generali intuicionisti. U najmanju ruku, ne čini se da je to očito neplauzibilno tvrditi. Možda iz toga doista slijedi da svake dvije različite definicije definiraju *različite* pojmove. (Uz izuzetak, naravno, onih slučaja u kojima je razlika samo notacijska, npr. ako dvije riječi u različitim jezicima označavaju isti pojam. "Bespernati dvonožac" i "featherless biped" bili bi, očito, isti pojam.) To bi svakako bilo blisko Russellovim ranim stavovima iz *The Principles of Mathematics*. Kako bilo, uzmemo li da pojam posjeduje svoje značenje bitno, ne izgleda posve neplauzibilnim tvrditi da se ta tri, navodno različita, načela poročnoga kruga ipak, kako je smatrao Russell, svode na isto ili barem uzajamno povlače. Time za bitno intenzionalne entitete –

pojmove, atribute ili svojstva – za razliku od skupova, neprirične definicije ne bi bile dopuštene.

Taj smisao intenzionalnih entiteta imat ćemo na umu pri konstrukciji sustava KIRTT. To nas pak vodi razgranatoj teoriji tipova. Formalno, stvar ćemo izraziti na način da red apstrakta ne određujemo (samo) s obzirom na red varijable vezane apstraktom (to jest, Russellovim jezikom, s obzirom na argumente stavačne funkcije), kao što je to slučaj u jednostavnim teorijama tipova, već (i) s obzirom na red formule kojom smo definirali apstrakt. Time će nam razlika reda apstrakta i reda apstraktne varijable ("razina", kako to nazivlje Church [14]) ponegdje biti viša od 1, što je glavno formalno razlikovno obilježje razgranatih spram jednostavnih teorija tipova.

Toliko o osnovnoj filozofijskoj motivaciji za kumulativnu intenzionalnu razgranatu teoriju tipova. Puno je toga što bi se opravdano moglo smatrati spornim u površnoj filozofijskoj analizi danoj gore. No, kako smo više puta ponovili, u ovom nam je poglavlju cilj tek formalnim sredstvima artikulirati određeni pogled na intenzionalne predmete, ne taj pogled pokušati filozofijski obraniti.

Kao što je često slučaj, u formalizaciji teorije tu i tamo ćemo se naći pred izborom između nekoliko mogućnosti. U tim slučajevima, kratko ćemo se zaustaviti i pokušati opravdati naš izbor. Ponegdje će taj izbor biti vođen pozadinskim filozofijskim razmatranjima, ponegdje puko tehničkim razlozima. No, kako je svrha naše formalizacije testirati određene metafizičke poglede, najčešće ćemo odabirati ona rješenja za koja nam se učini da bolje odražavaju neformalne ideje o intenzionalnim predmetima. Gdje očite filozofijske razlike nema, odabirat ćemo ona koja nam se učine tehnički jednostavnijima.

3.2 Jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$

Započnimo definicijom reda. Kako u KIRTT-u imamo posla samo s jednomjesnim priročnim slovima i apstraktima, ne moramo tipove razlikovati prema mjesnosti i stoga umjesto o tipovima možemo jednostavno govoriti samo o redovima.

Definicija 1. (Red)
$0, 1, 2, \ldots$ *su redovi.*
ω *je red.*

Kao sintaktičke varijable za redove rabit ćemo 't' i 'u', ponegdje s donjim pokazateljem. Red varijabla i konstanata bit će naznačen gornjim pokazateljem na varijabli, odnosno konstanti. Neformalno, 0 je red pojedinačnosti, 1 red svojstava prvoga reda (tj. svojstava pojedinačnosti), 2 red svojstava drugoga reda (tj. svojstava svojstava prvoga reda i pojedinačnosti) itd. Ideja je da se svojstvo reda t može odnositi na predmete reda u, za $u < t$. To nam omogućuje uvesti red ω, red svojstava koje možemo, možda pomalo pretenciozno, nazvati eidetičkim ili transcendentalnim svojstvima, a koja mogu pripadati predmetima svakoga konačnoga reda. Očito, o ω redu morat ćemo još dosta toga kazati, ali to će morati pričekati dok detaljnije ne opišemo jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Definicija 2. (Rječnik jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$)
Rječnik jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ sastoji se od sljedećih znakova:
1. prebrojivo mnogo varijabla za svaki red,
2. prebrojivo mnogo konstanata za svaki red,
3. poveznikā $\neg$ i $\vee$,
4. djelateljā $\forall$ i λ,
5. pomoćnih znakova $($, $)$, ., $\langle$ i $\rangle$.

Kao varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ rabit ćemo 'x', 'y' i 'z', kao konstante 'c', 'd' i 'e', s donjim pokazateljima ili bez njih i uvijek s gornjim pokazateljem reda. Neformalno ćemo kao konstante koristiti i druga mala latinična slova, po potrebi i cijele riječi. Kao sintaktičke varijable za varijable i konstante jezika rabit ćemo podebljana mala latinična slova, s donjim pokazateljima i pokazateljima reda ili bez njih, npr. '$\mathbf{x}$', '$\mathbf{y}_1^t$', '$\mathbf{c}$', '$\mathbf{d}^u$' i sl. Metavarijable za formule bit će nam 'ϕ' i 'ψ', ponegdje s donjim pokazateljima. Kako je uobičajeno – i kako smo, uostalom, već pokazali na primjerima u prethodnome odsječku – znakovi i nizovi znakova jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, npr. formule, u metajeziku imena su sebe samih.

Oznake i formule moramo, kao i u drugim teorijama tipova, zbog njihove uzajamne definicijske ovisnosti, definirati zajedno.[100]

[100]Uočimo samo da su oznake (*terms*) ovdje određena vrsta *izraza* našega jezika (varijable, konstante i apstrakti), dok smo u prethodnome poglavlju, slijedeći Russella, 'oznaka' rabili za stvari i pojmove koji su sastavnice stavaka, tj. za predmete same.

Definicija 3. (Oznaka)

1. Svaka varijabla $\mathbf{x}^t$ *oznaka je reda* t.

2. Svaka konstanta $\mathbf{c}^t$ *oznaka je reda* t.

3. Ako je $\mathbf{x}^t$ *varijabla reda* t, *a* ϕ *formula reda* u, $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle$ *je oznaka reda* $k+1$, *gdje je* $k = max(t, u)$.

Definicija 4. (Formula)

1. Ako je $\mathbf{x}^t$ *varijabla reda* t, τ^u *oznaka reda* u *i* $u < t$, *onda je* $\mathbf{x}^t(\tau^u)$ *formula.*

2. Ako je $\mathbf{c}^t$ *konstanta reda* t, τ^u *oznaka reda* u *i* $u < t$, *onda je* $\mathbf{c}^t(\tau^u)$ *formula.*

3. Ako je ϕ *formula,* $\mathbf{x}^t$ *varijabla reda* t, τ^u *oznaka reda* u *i* $u \leq t$, *onda je* $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle(\tau^u)$ *formula.*

4. Ako su ϕ *i* ψ *formule, onda su* $\neg\phi$ *i* $(\phi \vee \psi)$ *formule.*

5. Ako je ϕ *formula, onda je* $\forall\mathbf{x}^t\phi$ *formula.*

Red formule najviši je red oznake u formuli.

Metavarijable za oznake bit će nam 'τ' i 'υ', s donjim pokazateljima i pokazateljima reda ili bez njih. Oznake oblika $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle$ zvat ćemo 'priročni apstrakti' (također i 'λ-apstrakti' ili samo 'apstrakti'), a varijable vezane djelateljem λ 'apstraktne varijable'.

Obratimo pažnju na 3. točku definicije 3. Prema njoj, za svaku danu formulu ϕ konačnoga reda postoji oznaka $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle$. Oznaku $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle$ neformalno možemo shvatiti kao ime svojstva "biti predmet koji je reda manjega ili jednakoga redu t i koji zadovoljava formulu ϕ". U izradi modela za KIRTT opisat ćemo funkciju koja svakomu apstraktu pridružuje odgovarajući predmet. Apstrakti u sustavu KIRTT stoga vrše istu ulogu koju u nekim sustavima vrši prikladna aksiomatska shema sadržaja: osiguravaju da za svaku formulu (koja zadovoljava određene uvjete) postoji odgovarajući predmet specificiran tom formulom.[101]

Primijetimo da red apstrakta $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle$ nije određen samo redom varijable vezane djelateljem λ, već i redom formule ϕ. Obično želimo da λ veže varijablu koja je slobodna u ϕ i tada je red apstrakta za jedan veći od reda formule ϕ. (Red je definiran općenitije jer dopuštamo, kao i u slučaju praznoga pokoličavanja, da se $\mathbf{x}^t$ ne nalazi u ϕ i da red apstraktne varijable nadvisuje red formule.) U svakome slučaju, red apstrakta nadvisuje red bilo koje oznake u formuli ϕ i stoga, kako ćemo vidjeti u opisu semantike za KIRTT, predmet označen njime ne može biti

[101] Usp. Fitting [21, str. 3].

vrijednost varijabla koje se nalaze u formuli. Očita je posljedica toga *predikativnost* sustava KIRTT: predmet označen λ-apstraktom i "definiran" odgovarajućom formulom ϕ ne može biti u području pokoličavanja količitelja pomoću kojih je specificiran, tj. koji se nalaze u ϕ.

Primijetimo također da je, prema definiciji, red apstrakta *uvijek* strogo veći od reda formule ϕ i time strogo veći od reda *svake* oznake u formuli, neovisno radilo se o vezanoj varijabli, slobodnoj varijabli ili konstanti. Na primjer, ako je m^1 pojam "mudrost", apstrakt $\langle\lambda x^0.m^1(x^0)\rangle$, tj. pojam "biti pojedinačnost koja ima svojstvo mudrosti", predmet je reda 2, a ne 1. To svakako odstupa od Russellove neformalne tipologije u *Principia Mathematica*, kao i od tipologija onih formalizacija teorije tipova koje su vjernije Russellovim idejama.

Pojasnimo ukratko u čemu je stvar. Naši su apstrakti "imena" atributa. Ti atributi donekle odgovaraju Russellovim stavačnim funkcijama, realistički shvaćenima. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da su stavačne funkcije izvanjezični entiteti. Russell u *Principia* nema formalni mehanizam nominalizacije formula, ali u uvodu neformalno rabi cirkumfleks iznad varijable otprilike u smislu u kojem mi rabimo λ. Tako Russellovo $\phi\hat{x}$ odgovara našem apstraktu $\langle\lambda x^0.\phi\rangle$, kao oznaka za odgovarajući atribut ili stavačnu funkciju. U Russellovoj tipologiji, apstrakt formule označava entitet (tj. stavačnu funkciju) koji je višega reda od najvišega reda *vezanih* varijabla u formuli. Razlog je, naravno, načelo poročnoga kuga: "Što god uključuje vezanu varijablu, ne smije biti među mogućim vrijednostima te varijable." [101, str. 204] Međutim, red te stavačne funkcije ne mora biti strogo viši od reda svake *slobodne* varijable ili konstante u formuli. Preciznije, red stavačne funkcije može biti *jednak* najvišemu redu slobodne varijable ili konstante u formuli – naravno, ako red nijedne vezane varijable u formuli nije tom redu jednak ili viši od njega. Razlog je to što slobodne varijable i konstante, za razliku od vezanih varijabla, tj. razliku od pokoličavanja, ne pretpostavljaju nikakvu "sveukupnost" kojoj stavačna funkcija u pitanju ne bi smjela pripadati.[102]

Za primjer, red apstrakta $\langle\lambda x^0.m^1(x^0)\rangle$ u Russellovoj bi tipologiji bio 1, dok bi apstrakt $\langle\lambda x^0.\forall y^1 y^1(x^0)\rangle$ bio reda 2. Prema našoj definiciji, red je tih obaju apstrakata 2. Drugim riječima, definicija oznake, u određivanju reda apstrakta – kao ni definicija formule, u određivanju reda formule – nije osjetljiva na razlike u formuli ϕ između vezanih varijabla s jedne i slobodnih varijabla i konstanata s druge strane. Jedan je razlog za to jednostavnost naše definicije reda apstrakta, iako je time, u određenom smislu, naš kriterij smislenosti zahtjevniji od onoga što ga

[102] Vidi npr. aksiomatske sheme sadržaja u Churchovoj formalizaciji Russellove razgranate teorije tipova [14, str. 750].

postavlja načelo poročnoga kruga sámo. Drugi je razlog to što se, prema neformalnoj metafizičkoj slici intenzionalnih entiteta opisanoj u prethodnom odsječku, čini, kao prvo, da bi pojmovi označeni nominaliziranom formulom morali kao "sastavnice" svojega sadržaja imati pojmove označene oznakama u toj formuli i, kao drugo, da bi u nekakvoj intenzionalnoj hijerarhiji pojam morao zauzimati različit položaj od onoga koji zauzimaju njegove sastavnice. Red apstrakta stoga bi morao biti viši od reda bilo koje konstante u pratećoj formuli.

Formule oblika $\tau(v)$, tj. formule tvorene prema pravilima 1. – 3. definicije 4, nazivat ćemo 'atomarne formule'. Poveznici koji nisu dio osnovnoga rječnika i opstojni količitelj definiraju se na standardni način. Također pretpostavljamo standardnu definiciju slobodnih i vezanih pojavaka varijabla. Često ćemo, ne prijeti li višeznačnost, neformalno umjesto 'pojavak varijable' pisati jednostavno 'varijabla'.

Definicija 5. (Stupanj oznake ili formule)
Stupanj oznake ili formule jest broj pojavaka poveznikā i djelateljā koje ta oznaka ili formula sadrži.

Definicija 6. (Zatvorena oznaka)
Zatvorena oznaka jest oznaka koja ne sadrži slobodne pojavke varijabla. Otvorena je oznaka ona koja nije zatvorena.

Definicija 7. (Iskaz)
Iskaz je formula koja ne sadrži slobodne pojavke varijabla. Otvorena formula je formula koja nije iskaz.

Pogledamo li sada naše definicije, vrijedi uočiti nekoliko stvari. KIRTT sadrži maksimalan red, red ω. Naravno, mogli smo uopće ne uvesti red ω. Ništa što smo do sada kazali, kao ni definicije oznake i formule, ne ovisi o tome imamo li u jeziku oznake beskonačnoga reda. U određenom smislu, teorija tipova bez beskonačnoga reda ima prednosti – ako ništa, čini se tehnički jednostavnijom i izbjegava nezgodno pitanje kako razumjeti svojstva beskonačnoga reda. Također izbjegava očito pitanje zašto, ako već dopuštamo red ω, ne poopćimo definiciju reda uvevši redove za *svaki* redni broj, tj. zašto ne poopćimo naš sustav na transfinitnu teoriju tipova. Sustav koji bi dopuštao samo konačne redove mogli bismo možda shvatiti kao bliži, prisjetimo li se Gödelova razlikovanja dviju koncepcija pojma, "konstruktivističkomu" nego "realističkomu" shvaćanju pojmova. Ne računajući kumulativnost, odgovaralo bi to otprilike logici *Principia* bez aksiomatske sheme svedljivosti.

Međutim, upravo nam kumulativnost dopušta uvesti oznake i formule reda ω. Naime, u nekumulativnim je teorijama $\tau^t(\upsilon^u)$ formula samo ako je $t = u + 1$, a kako ω nije sljedbenik, $\tau^\omega(\upsilon^u)$ ne bi bilo formula niti za jedan u. Kako u kumulativnoj teoriji razlika između t i u može biti proizvoljno velika, načelno možemo uvesti i oznake beskonačnoga reda i tada bi, prema našoj definiciji formule, izraz $\tau^\omega(\upsilon^u)$ doista bio formula. No pitanje je sada imamo li ikakvo bilo tehničko bilo filozofijsko opravdanje za uvođenje reda ω. Odgovor je: "Možda."

Varijable reda ω omogućit će nam kvantifikaciju nad *svim* predmetima i time – iako samo djelomično – preuzeti ulogu koju u *Principia* ima mehanizam sustavne višeznačnosti. Također, i povezano s tim, pomoću ω-varijabla možemo na vrlo prirodan način definirati istovjetnost:

$$\tau^t = \upsilon^u \leftrightarrow_{def} \forall x^\omega(x^\omega(\tau^t) \leftrightarrow x^\omega(\upsilon^u)).$$

Gornja definicija, uz tumačenje količitelja koje ćemo dati u idućemu odsječku, znači da su dva predmeta istovjetna ako i samo ako su im zajednička sva svojstva. Usporedimo to s uobičajenom definicijom u nekumulativnim teorijama:

$$\tau^t = \upsilon^t \leftrightarrow_{def} \forall x^{t+1}(x^{t+1}(\tau^t) \rightarrow x^{t+1}(\upsilon^t)).$$

Prednost je prve definicije dvostruka. Kao prvo, njome relaciju istovjetnosti definiramo za bilo koja dva predmeta reda manjega od ω, a ne samo za predmete istoga reda. Da dva predmeta moraju biti istoga reda da bi bila istovjetna, nije eksplicitno stipulirano definicijom, ali slijedi iz nje.[103] Kao drugo, istovjetnost se definira referiranjem na *sva* svojstva, a ne samo na svojstva neposredno višega reda. Prva je definicija stoga bliža punokrvnu leibnizovskomu shvaćanju

[103]Međutim, dvopogodbu u prvoj definiciji ne možemo zamijeniti pogodbom kao u drugoj definiciji. Da bismo vidjeli zašto je tomu tako, uzmimo najprije da su τ^t i υ^u zatvorene oznake i pretpostavimo da je $t > u$. Tada, ako se τ^t i υ^u slažu u svim svojstvima reda većega od t, slijedi $\tau^t = \upsilon^u$. Naime, za svako vrjednovanje koje varijabli x^ω pridružuje predmet reda većega od u, a manjega ili jednakoga redu t, $x^\omega(\tau^t)$ neistinito je pa bi cijela pogodbena formula bila istinita. Međutim, pretpostavimo sad da je $t < u$. Za svako vrjednovanje koje varijabli x^ω pridružuje predmet reda većega od t, a manjega ili jednakoga redu u, takvo da je $x^\omega(\tau^t)$ istinita formula, formula $x^\omega(\upsilon^u)$ neistinita je pa je i cijela pogodbena formula neistinita. Dakle, $\tau^t \neq \upsilon^u$. Slijedi da istovjetnost, tako definirana, ne bi bila simetrična relacija. Preciznu definiciju istinitosti formula tek ćemo dati u idućemu odsječku, ali argument se čini intuitivno jasnim.

istovjetnosti nego druga.[104]

Primijetimo, međutim, da se definicija istovjetnosti odnosi samo na predmete konačnoga reda: izrazi poput $\forall x^\omega x^\omega(\tau^\omega)$ nisu formule. Općenito, iako dopuštamo predmete beskonačnoga reda, definicija formule, zajedno s definicijom reda po kojoj je ω najviši red, ne dopušta priricanje svojstava tim predmetima. Oznake reda ω mogu imati funkciju priroka, ali ne i podmeta. Tehnički je razlog jasan: ne želimo dopustiti samopriricanje i time mogućnost paradoksā samoodnošenja. No što bi moglo biti filozofijsko opravdanje za to, osim izbjegavanja paradoksā? Opravdanje – ili barem određenu metafizičku racionalizaciju – možda bi se moglo naći u razmatranju odnosa između *ideja* i, nazovimo ih tako, *stvari*.

KIRTT je zamišljena kao formalna teorija intenzionalnih entiteta, tj. pojmova, svojstava ili atributā. Predmeti reda 0 pojedinačnosti su, *concreta*, ne-pojmovi – predmeti kojima se mogu priricati svojstva, ali koji se sami ne mogu priricati. Dakako, semantikom dopuštamo posve proizvoljne predmete kao pojedinačnosti, ali u neformalnoj intendiranoj semantici predmeti reda 0 predstavljaju, u aristotelovskome žargonu, prve supstancije: Sokrata, Platona, toga i toga konkretnoga konja i sl. (ili što god već prve supstancije bile). Predmeti reda većega od 0 a manjega od ω svojstva su – svojstva pojedinačnosti, svojstva svojstava, itd. Ti se predmeti mogu priricati, no također im mogu biti priricana svojstva: Sokrat je mudar, mudrost je dobra. Predmete kojima se mogu priricati svojstva, bili ti predmeti pojedinačnosti ili svojstva, nazovimo 'stvari'. (Taj je naziv očito etimologijski neprikladan, ali poslužit će za naše svrhe.) No što s predmetima reda ω, koji se, suprotno pojedinačnostima, mogu priricati svakoj stvari, ali kojima se ne mogu priricati neka daljnja svojstva? Predmeti reda ω mogu se možda shatiti kao *donekle* srodni platonovskim idejama, u jednoj mogućoj interpretaciji. Samopriricanje prijeti paradoksima i stoga se predmeti u našoj teoriji ne mogu priricati samima sebi niti drugim predmetima istoga reda kao i oni. Vrijedi to za sve predmete pa tako i za ideje, što god one bile. Međutim, želimo li našim sustavom formalno prikazati entitete poput ideja, ne bismo smjeli dopustiti niti da postoje svojstva višega reda koja se mogu priricati idejama (i predmetima nižih redova). Time bismo, naime, dobili nešto poput *nad*ideja – drevni problem "trećega čovjeka" tu odmah pada na pamet.[105] Ideje stoga uopće ne bi smjele biti stvari, ne bi im se smjela moći priricati svojstva. To je ujedno filozofijsko opravdanje za odluku da ne dopustimo redove više od ω. Daljnji su razlog

[104] Ta prednost, dakako, vrijedi samo u slučaju bilo kumulativnih bilo razgranatih teorija. U standardnim jednostavnim nekumulativnim teorijama, predmet za svojstva može imati *samo* predmete neposredno višega reda i stoga se potonjom definicijom pokoličuje nad svim svojstvima koje predmet uopće može imati.

[105] Vidi npr. Vlastos [120] za utjecajnu analizu Platonova argumenta trećega čovjeka u *Parmenidu*.

očekivane tehničke komplikacije koje bi donijela transfinitna teorija tipova.

Nažalost, ako bi predmeti reda ω trebali predstavljati platonovske ideje, imamo sada problem. Taj je problem to što bi se, barem *u nekome smislu*, ideje doista morale moći priricati same sebi i drugim idejama: ljepota jest lijepa i pravedna, pravednost jest pravedna i lijepa. Možemo puno toga reći o idejama – opet, barem u nekome smislu. U nekome smislu, ideje bi morale biti stvari. Kako spojiti taj zahtjev s našom teorijom redova i zabranom samopriricanja? Kako ga spojiti sa zahtjevom da nema ideja iznad ideja? Ideja je sljedeća: ideje nikada *nisu* stvari, ali mogu imati stvari kao svoje "predstavnike" ili "surogate", predmete koje možemo shvatiti kao svojevrsne reifikacije ili aproksimacije ideja: svojstva određenoga konačnoga reda koja predstavljaju ili simuliraju ideje. Kada naizgled priričemo neko svojstvo ideji, "zapravo" ga priričemo tim postvarenjima ideja, ne idejama samima. Za sada to zvuči (i jest) prilično nejasno, ali tek nakon što opišemo osnovnu semantiku KIRTT-a, moći ćemo nešto više kazati o tome kako formalno artikulirati tu zamisao. Naravno, ne očekujemo da će sámo formalno preciziranje te zamisli nju nekako učiniti plauzibilnijom.

Primijetimo dalje da, iako varijable i konstante (a time i formule) mogu biti reda ω, priročni apstrakti *ne* mogu. Red apstrakta uvijek je sljedbenik, bilo reda apstraktne varijable bilo reda prateće formule, i stoga je uvijek konačan. Također, djelateljem λ ne možemo nominalizirati formulu koja je reda ω. Red apstrakta uvijek je barem za jedan veći od reda prateće formule, a ne dopuštamo redove više od ω. Iz istoga razloga, λ ne veže ω-varijable. Formule beskonačnoga reda, drugim riječima, ne specificiraju predmete. Predmete označene λ-apstraktima možemo shvatiti kao "složena svojstva", koja, Russellovim rječnikom, "uključuju" i "pretpostavljaju" svojstva označena oznakama u formuli koju sadrži apstrakt. Kako λ-apstrakt ne može biti reda ω, to znači da predmete reda ω ne možemo specificirati nekom formulom ili "definirati" pomoću drugih svojstava – predmeti reda ω mogu biti imenovani samo konstantama, ne apstraktima. Predmeti reda ω utoliko se mogu smatrati "jednostavnima" ili "nesastavljenima" od predmeta nižih redova. Ta jednostavnost pojmova, moglo bi se argumentirati, u skladu je s onim što bismo očekivali od ideja.

Jedan od problema s tim što ne možemo napraviti apstrakt formule beskonačnoga reda jest to što, definiramo li istovjetnost na način predložen gore, ne možemo imati svojstva (tj. predmete) poput "biti pojedinačnost istovjetna s c^0" i sl. Naime, kako definicija istovjetnosti u sebi sadrži ω-varijable, formule poput $x^0 = c^0$ beskonačnoga su reda i stoga izrazi poput $\langle \lambda x^0 . x^0 = c^0 \rangle$ *nisu* oznake. Općenito, ako formula ϕ sadrži znak '$=$', izraz $\langle \lambda \mathbf{x} . \phi \rangle$ nije oznaka jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Nakon što smo definirali oznake i formule, sljedećih nekoliko definicija opisuje operaciju supstitucije nad izrazima jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Definicija 8. (Supstitucija)
Supstitucija je preslikavanje sa skupa varijabla u skup oznaka jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, takva da se varijable reda t preslikavaju u oznake reda u, za $u \leq t$.

Supstituciju ćemo općenito označavati sa 'σ', ponegdje s različitim pokazateljima. U idućoj definiciji uvest ćemo i posebnu notaciju za konačnu supstituciju. Ako je $\mathbf{x}$ varijabla jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, $\mathbf{x}\sigma$ je oznaka koju σ pridružuje varijabli $\mathbf{x}$. Ako je Φ bilo koji izraz jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, $\Phi\sigma$ je izraz koji je rezultat primjene supstitucije σ na Φ, tj. izraz koji dobijemo zamijenivši u Φ svaku varijablu $\mathbf{x}$ oznakom $\mathbf{x}\sigma$.

Supstitucija, kako smo ju definirali, razlikuje se od supstitucije u nekumulativnim teorijama time što se varijabla može supstituirati oznakom koja je nižega reda od reda varijable. Definicijom formule gramatički smo dopustili da se svojstva reda t mogu priricati predmetima koji su reda nižega od $t-1$ pa su tako npr. $x^3(x^1)$, $c^4(x^0)$ i $\langle\lambda y^2.y^2(z^0)\rangle(d^1)$ formule. Jednako tako, želimo imati pravila dokazivanja kojima ćemo iz formula oblika $\forall\mathbf{x}^t.\phi$ i $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle(\upsilon^u)$ moći izvesti formule koje su rezultat supstitucije varijable $\mathbf{x}^t$ u formuli ϕ oznakom koja je reda manjega od t. Na primjer, želimo iz $\forall x^3 c^4(x^3)$ moći izvesti formulu $c^4(d^1)$, a iz $\langle\lambda z^3.z^3(e^0)\rangle(d^2)$ formulu $d^2(e^0)$. Stoga supstitucija mora biti definirana na način koji će to dopustiti.

Slijedi sada nekoliko standardnih tehničkih definicija koje se ne razlikuju bitno od analognih definicija u jednostavnoj teoriji tipova.

Definicija 9. (Konačna supstitucija)
Konačna supstitucija $\{\mathbf{x}_1/\tau_1, ..., \mathbf{x}_n/\tau_n\}$ jest supstitucija koja konačno mnogo varijabli $\mathbf{x}_i$ preslikava u oznake τ_i, dok za sve ostale varijable $\mathbf{y}$ vrijedi $\mathbf{y}\{\mathbf{x}_1/\tau_1, ..., \mathbf{x}_n/\tau_n\} = \mathbf{y}$.

Konačnu supstituciju, kako smo ju definirali, često ćemo rabiti u odsječku 3.4. No općenito će nas najviše zanimati supstitucija $\{\mathbf{x}^t/\tau^u\}$, gdje je $\mathbf{x}^t$ neka varijabla vezana količiteljem ili pak apstraktna varijabla. Ta je supstitucija važna za formulaciju pravilā dokazivanja.

Definicija 10. ($\sigma_{\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n}$)

Za svaku supstituciju σ, $\sigma_{\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n}$ je supstitucija takva da, za $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{x}_i\sigma_{\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n} = \mathbf{x}_i$, dok za sve ostale varijable $\mathbf{y}$ vrijedi $\mathbf{y}\sigma_{\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n} = \mathbf{y}\sigma$.

Definicija 11. (Supstitucija na oznakama i formulama)

Neka je σ supstitucija. Supstituciju na konstantama, apstraktima i formulama jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ definiramo rekurzivno na sljedeći način:

1. $\mathbf{c}\sigma = \mathbf{c}$.

2. $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle\sigma = \langle\lambda\mathbf{x}.\phi\sigma_{\mathbf{x}}\rangle$.

3. $\tau(\upsilon)\sigma = \tau\sigma(\upsilon\sigma)$.

4. $[\neg\phi]\sigma = \neg[\phi\sigma]$.

5. $(\phi \vee \psi)\sigma = (\phi\sigma \vee \psi\sigma)$.

6. $[\forall\mathbf{x}\phi]\sigma = \forall\mathbf{x}[\phi\sigma_{\mathbf{x}}]$.

Smisao uglatih zagrada u prethodnoj definiciji trebao bi biti dovoljno jasan. Ta definicija, zajedno s njoj prethodećom, kaže da nas zanimaju samo one supstitucije koje u oznakama i formulama supstituiraju slobodne varijable, dok vezane ostavljaju netaknutima. Stavak koji slijedi općenita je tvrdnja o ponašanju supstitucije i ne ovisi o posebnostima jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Stavak 1. *Neka su σ i σ' supstitucije.*

1. Ako za svaku varijablu $\mathbf{x}$ slobodnu u oznaci τ vrijedi $\mathbf{x}\sigma = \mathbf{x}\sigma'$, onda $\tau\sigma = \tau\sigma'$.

2. Ako za svaku varijablu $\mathbf{x}$ slobodnu u formuli ϕ vrijedi $\mathbf{x}\sigma = \mathbf{x}\sigma'$, onda $\phi\sigma = \phi\sigma'$.

Dokaz. Indukcijom po stupnju oznake i formule. Pretpostavimo da stavak vrijedi za sve oznake i formule stupnja manjega od k i dokažimo zatim da vrijedi i za oznake i formule stupnja k.

1. 1. Neka je τ oznaka stupnja $k = 0$. Ako je τ neka varijabla $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ je slobodna pa, prema pretpostavci, $\mathbf{x}\sigma = \mathbf{x}\sigma'$. Ako je τ neka konstanta $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\sigma = \mathbf{c} = \mathbf{c}\sigma'$.

Neka je τ oznaka stupnja $k \neq 0$. Tada je τ neki λ-apstrakt $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle$. Primijetimo da, ako se σ i σ' slažu u svim slobodnim varijablama u $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle$, onda se $\sigma_{\mathbf{x}}$ i $\sigma'_{\mathbf{x}}$ slažu u svim slobodnim varijablama u ϕ. Stoga, $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle \sigma = \langle \lambda \mathbf{x}.\phi\sigma_{\mathbf{x}} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}.\phi\sigma'_{\mathbf{x}} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle \sigma'$.

1. 2. Neka je ϕ formula stupnja k. Prema tvorbenim pravilima za formule, ϕ može imati četiri oblika: $\tau(\upsilon)$, $\neg\psi$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$ i $\forall \mathbf{x}\psi$. Dokazat ćemo tvrdnju za atomarne i pokoličene formule. Dokaz ostalih slučajeva slijedi isti obrazac.

Neka je $\phi = \tau(\upsilon)$. Oznake τ i υ stupnja su $\leq k$, a dokazali smo gore da 1. točka stavka vrijedi za sve oznake stupnja $\leq k$. Stoga imamo $\tau(\upsilon)\sigma = \tau\sigma(\upsilon\sigma) = \tau\sigma'(\upsilon\sigma') = \tau(\upsilon)\sigma'$.

Neka je $\phi = \forall \mathbf{x}\psi$. Formula ψ tada je stupnja $< k$ pa za nju, prema induktivnoj hipotezi, vrijedi 2. točka stavka. Također, ako se σ i σ' slažu za sve slobodne varijable u $\forall \mathbf{x}\psi$, onda se $\sigma_{\mathbf{x}}$ i $\sigma'_{\mathbf{x}}$ slažu za sve slobodne varijable u ψ. No tada vrijedi $[\forall \mathbf{x}\psi]\sigma = \forall \mathbf{x}[\psi\sigma_{\mathbf{x}}] = \forall \mathbf{x}[\psi\sigma'_{\mathbf{x}}] = [\forall \mathbf{x}\psi]\sigma'$.

Dokazali smo time korak indukcije, iz čega stavak slijedi za sve oznake i formule u $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. $\square$

Definicija 12. (Slobodna supstitucija)
1. σ je slobodna za varijablu ili konstantu.
2. σ je slobodna za $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$ akko su zadovoljena sljedeća dva uvjeta: (i) *$\sigma_{\mathbf{x}}$ je slobodna za ϕ;* (ii) *ako je* **y** *bilo koja varijabla slobodna u $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$, onda* **y**$\sigma$ *ne sadrži slobodan pojavak varijable* **x**.
3. σ je slobodna za $\tau(\upsilon)$ akko je slobodna za τ i slobodna za υ.
4. σ je slobodna za $\neg\phi$ akko je slobodna za ϕ.
5. σ je slobodna za $(\phi \vee \psi)$ akko je slobodna za ϕ i slobodna za ψ.
6. σ je slobodna za $\forall \mathbf{x}\phi$ akko su zadovoljena sljedeća dva uvjeta: (i) *$\sigma_{\mathbf{x}}$ je slobodna za ϕ;* (ii) *ako je* **y** *bilo koja varijabla slobodna u $\forall \mathbf{x}\phi$, onda* **y**σ *ne sadrži slobodan pojavak varijable* **x**.

Naredna je definicija važna promjena spram nekumulativne teorije tipova. Kako je KIRTT kumulativna teorija, pravila dokazivanja (tj. prikladne inačice pravila za isključenje općega količitelja i β-konverzije) morala bi dopustiti da iz formula oblika $\forall \mathbf{x}^t.\phi$ i $\langle \lambda \mathbf{x}^t.\phi \rangle(\upsilon^u)$ možemo izvesti formulu $\phi\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$ čak i ako je $u < t$. Međutim, kako smo već spomenuli govoreći o kumulativnosti, imamo tada očit problem, koji se ne javlja u nekumulativnim teorijama. U nekumulativnim je teorijama $\langle \lambda \mathbf{x}^t.\phi \rangle(\upsilon^u)$ formula ako i samo ako je $u = t$ i stoga, ako je ϕ formula, $\phi\{\mathbf{x}^t/\upsilon^u\}$ također je formula: raspored pokazateljā redova u izrazu dobivenome supstitucijom nije promijenjen. Problem je što u kumulativnoj teoriji, ako je u različit od t, nemamo jamstvo da izraz $\phi\{\mathbf{x}^t/v^u\}$ zadovoljava definiciju formule. Na primjer, iako je, prema definiciji, $\langle\lambda x^3.x^3(x^1)\rangle(c^0)$ formula, β-konverzija očito ne vrijedi jer $c^0(x^1)$ *nije* formula. Stoga ćemo u formulaciji naših pravila dokazivanja morati izričito zahtijevati da $\phi\{\mathbf{x}^t/v^u\}$ slijedi iz $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle(v^u)$ samo ako je $\phi\{\mathbf{x}^t/v^u\}$ doista formula. Drugim riječima, samo ako je $\{\mathbf{x}^t/v^u\}$ "primjerena" vrsta supstitucije.

Definicija 13. (Primjerena supstitucija)
Neka je σ supstitucija i neka je ϕ formula jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Kažemo da je σ primjerena za ϕ akko su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

1. σ je slobodna za ϕ,

2. $\phi\sigma$ je formula.

Kažemo da je supstitucija σ primjerena za apstrakt $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle$ akko je $\sigma_{\mathbf{x}}$ primjerena za formulu ϕ.

Za kraj ovoga odsječka, uočimo da možemo, ako bismo htjeli naglasiti da je KIRTT razgranata, a ne jednostavna teorija tipova, lako povući razliku između reda i tipa u našim definicijama. Tip oznake mogli bismo definirati na sljedeći način: tip varijabla i konstanata njihov je red; tip apstrakta $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle$ je $t+1$. Atomarne formule tada bismo mogli definirati ovako: ako je τ^t oznaka tipa t, v^u oznaka reda u i $u<t$, $\tau^t(v^u)$ je formula. Relevantnu razliku između tipa i reda imamo samo u slučaju λ-apstrakta: *tip* apstrakta određen je redom varijable vezane djelateljem λ, dok *red* apstrakta, kako ćemo vidjeti u sljedećem odsječku, naznačuje red predmeta označenoga apstraktom. Analogno je to razlici između tipa i reda stavačne funkcije u Russellovoj teoriji tipova, gdje nam pokazatelj tipa govori što su argumenti funkcije, tj. koje su moguće vrijednosti slobodnih varijabla, a red pokazuje razinu kvantifikacije ili, možemo tako reći, ontološko ustrojstvo stavka pridruženoga argumentu. Kako je u jednostavnoj monadičkoj teoriji kakva je KIRTT sve definicije jednostavno formulirati rabeći samo pojam reda, nema potrebe za eksplicitnim uvođenjem tipova. No, kako vidimo iz predložene alternativne formulacije tvorbenoga pravila za atomarne formule, razlika između reda i tipa implicitno jest prisutna u našim tvorbenim pravilima. Poopćenjem KIRTT-a na teoriju relacija, tj. dopuštanjem višemjesnih priroka, razlika između tipa i reda postaje puno važnija.

3.3 Semantika

Opišimo sada osnovnu semantiku za KIRTT. Središnja definicija bit će tu definicija kumulativnoga poopćenoga Henkinova okvira za naš jezik. Nakon što damo formalnu definiciju, opisat ćemo što je intendirana neformalna semantika i kako se odnosi spram formalne definicije.

Definicija 14. (Okvir)
Struktura $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ kumulativni je poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ ako struktura zadovoljava sljedeće uvjete:
1. $\mathcal{H}$ je funkcija domena koje je skup redova.
2. Za svaki red t, $\mathcal{H}(t)$ je neki neprazan skup predmeta.
3. Ako je $\mathbf{c}^t$ konstanta reda t, $\mathcal{I}(\mathbf{c}^t) \in \mathcal{H}(t)$.
4. Za svaki red t, $\mathcal{E}$ je funkcija koja svakomu članu skupa $\mathcal{H}(t)$ pridružuje neki član skupa $\wp \bigcup_{0 \leq u < t} \mathcal{H}(u)$.

Skupove $\mathcal{H}(t)$ nazivat ćemo 'Henkinove domene'. Za Henkinovu domenu $\mathcal{H}(t)$ kažemo da ima red t.

Dakle, funkcija $\mathcal{H}$ svakomu redu pridružuje neki skup proizvoljnih predmeta. U "običnim" Henkinovim modelima, $\mathcal{H}$ redovima (za $t > 0$) pridružuje odgovarajuće skupove *skupova*, ali nama je namjera imati model u kojem će vrijednosti varijabla, tj. članovi Henkinovih domena $\mathcal{H}(t)$, biti intenzionalni predmeti – pojmovi, svojstva ili atributi – ne skupovi. Stoga zahtijevamo samo da je $\mathcal{H}(t)$ neprazan skup bilo kojih predmeta. No, intendirana neformalna semantika jest da je skup $\mathcal{H}(0)$ skup pojedinačnosti, $\mathcal{H}(1)$ skup svojstava pojedinačnosti, $\mathcal{H}(2)$ skup svojstava svojstava, itd.

$\mathcal{I}$ je tumačenje, funkcija koja svakoj konstanti jezika pridružuje predmet iz odgovarajuće Henkinove domene $\mathcal{H}(t)$ kao njezino "značenje". Neformalno, $\mathcal{I}$ nam kaže da konstante reda 0 označavaju pojedinačnosti, konstante reda 1 svojstva pojedinačnosti, itd. Uvjeti 1. – 3. zajednički su svim poopćenim (tj. intenzionalnim) Henkinovim okvirima. Kumulativnost izražavamo pomoću uvjeta 4.

Ideja je da funkcija $\mathcal{E}$ svakomu svojstvu ili pojmu, tj. svakom članu odgovarajuće Henkinove domene, pridružuje njegovu ekstenziju, skup stvari na koje se taj pojam odnosi. Domena $\mathcal{H}(0)$

skup je pojedinačnosti, a ne pojmova, i stoga $\mathcal{E}$ nije definirana na $\mathcal{H}(0)$. Svojstvima prvoga reda, članovima domene $\mathcal{H}(1)$, tj. svojstvima pojedinačnosti, funkcija $\mathcal{E}$, očekivano, pridružuje skupove pojedinačnosti, članove skupa $\wp\mathcal{H}(0)$. U nekumulativnim intenzionalnim teorijama tipova, funkcija ekstenzije predmetima iz skupa $\mathcal{H}(2)$ pridruživala bi elemente skupa $\wp\mathcal{H}(1)$, tj. ekstenzije svojstava drugoga reda bili bi skupovi čiji su svi članovi svojstva prvoga reda. No u kumulativnoj teoriji želimo moći svojstva drugoga reda priricati, kako svojstvima prvoga reda, tako i pojedinačnostima. Zbog toga svakomu članu domene $\mathcal{H}(2)$ pridružujemo kao ekstenziju neki podskup skupa $\mathcal{H}(0) \cup \mathcal{H}(1)$. Analogno, naravno, za predmete trećega i viših redova. Stoga 4. uvjet u gornjoj definiciji okvira.

Prije nego nastavimo s opisom semantike za KIRTT, uvedimo korisnu dodatnu notaciju:

Definicija 15. (Područje intenzija)
Područje intenzija $Int(t)$ za red t u okviru $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ definiramo kao uniju svih Henkinovih domena reda manjega ili jednakoga t, tj. $Int(t) = \cup_{0 \leq u \leq t} \mathcal{H}(u)$.

Članovi skupa $Int(t)$ svi su predmeti koji su reda manjega ili jednakoga t. $Int(t)$ stoga nazivamo i kumulativnom Henkinovom domenom reda t. Elemente skupa $Int(t)$ označavat ćemo s 'O', s pokazateljima ili bez njih.

Definicija 16. (Područje ekstenzija)
Područje ekstenzija $Ext(t)$ za red t u okviru $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ definiramo kao skup svih skupova koji kao elemente sadrže samo predmete Henkinovih domena koje su reda strogo manjega od t, tj. $Ext(t) = \wp \cup_{0 \leq u < t} \mathcal{H}(u)$.

Neformalno, članovi su skupa $Ext(t)$ sve moguće ekstenzije predmetā reda t. Iz definicije i iz toga što je za svaki t skup $\mathcal{H}(t)$ neprazan, očito je da za $u < t$ vrijedi $Ext(u) \subset Ext(t)$. S definicijom područja ekstenzija, 4. uvjet definicije okvira možemo parafrazirati ovako:

4'. Za svaki red t, $\mathcal{E}$ je funkcija koja svakom članu skupa $\mathcal{H}(t)$ pridružuje neki član skupa $Ext(t)$.

Pogledajmo sada jedan mogući dodatan uvjet definiciji okvira za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, koji bi opisivao odnos između onoga što smo, govoreći o redu ω, nazvali idejama i stvarima:

5. Za svaku konstantu* $\mathbf{c}^t$, $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^t)) = \mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^\omega)) \cap \cup_{0 \leq u < t} \mathcal{H}(u)$.

Prema tome uvjetu, konstanta $\mathbf{c}^\omega$ označavala bi ideju, predmet beskonačnoga reda, dok bi $\mathbf{c}^t$, za svaki $t < \omega$, označavala njezinu "reifikaciju" ili "aproksimaciju" u domeni $\mathcal{H}(t)$. Ideje bi u svojemu opsegu mogle sadržavati bilo koje stvari (no ne i ideje), dok bi opsezi njihovih reifikacija bili podskupovi opsega ideje, na taj način da se pojam $\mathcal{I}(\mathbf{c}^t)$ odnosi na sve i samo one predmete iz skupa $\cup_{0 \leq u < t} \mathcal{H}(u)$, tj. na sve i samo one predmete iz domena pridruženih redovima manjima od t, na koje se odnosi i ideja $\mathcal{I}(\mathbf{c}^\omega)$. Drugim riječima, imali bismo prikladnu relaciju monotonosti između ekstenzija predmetā $\mathcal{I}(\mathbf{c}^t)$.[106]

Na primjer, $mudrost^\omega$, $ljepota^\omega$, $pravednost^\omega$ i sl. bile bi ideje, dok bi $mudrost^1$, $mudrost^2$, $ljepota^4$ itd. bile njihove reifikacije. Sve što bi imalo svojstvo $mudrost^1$, imalo bi i svojstvo $mudrost^2$, ..., $mudrost^\omega$. Svi predmeti reda t koji imaju svojstvo $mudrost^\omega$, imali bi i svojstvo $mudrost^{t+1}$, no, naravno, ne i svojstvo $mudrost^t$. Ideje se, kao ni bilo što drugo, ne bi mogle priricati niti samima sebi niti drugim idejama, ali bilo bi sasvim legitimno $mudrost^\omega(mudrost^1)$, $pravednost^\omega(ljepota^1)$, $ljepota^3(pravednost^2)$ itd. Taj bi prijedlog možda mogao biti rješenje kojim bismo donekle pomirili teoriju tipova sa zahtjevom da se ideje u nekom smislu mogu priricati same sebi i drugim idejama, a da ujedno ne postoji nešto poput nadideja.

Kako bilo, uvjet 5*, kako je formuliran, prejak je i ne ćemo ga uključiti u definiciju okvira za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Naime, želimo dopustiti da postoje svojstva koja nemaju svoj analogon među svojstvima drugih redova i da konstante mogu označavati ta svojstva. Pripisati mudrosti svojstvo crvenosti, na primjer, ili svojstvo protežnosti, možda nije samo neistinito, već i (metafizički) besmisleno.

Međutim, želimo li uvesti svojstva koja zadovoljavaju nešto poput uvjeta 5^*, možemo to, za svako pojedino svojstvo, učiniti posebnim aksiomima i prikladnim posebnim dodatcima u definiciji okvira. Na primjer, takav bi pristup mogao pružiti alternativu leibnizovskoj definiciji istovjetnosti.

[106] To jest, za svaku konstantu $\mathbf{c}$, i svaki t i u, ako $u < t$, onda $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^u)) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^t))$. No također bi vrijedilo da, ako $t_1 < t_2$, $\mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^{t_1})) = \mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^{t_2})) \cap \cup_{0 \leq u < t_1} \mathcal{H}(u)$. Ekstenzija konstante $\mathbf{c}^\omega$ bila bi, naravno, $\cup_{0 \leq t < \omega} \mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathbf{c}^t))$.

Govoreći gore o motivaciji za KIRTT, vidjeli smo da je problem s predloženom kumulativnom definicijom istovjetnosti to što, prema definiciji oznake, ne bismo mogli imati apstrakte koji sadrže definirani simbol za istovjetnost. Naime, kumulativna definicija istovjetnosti sadrži varijable reda ω, a formule beskonačnoga reda ne možemo nominalizirati pomoću djelatelja λ jer bi, zbog razgranatosti (tj. zbog nedopuštanja impredikativnosti u KIRTT-u), red apstrakta morao nadvisivati red formule, a ω je maksimalan red. S druge strane, nekumulativna definicija istovjetnosti, tj. definicija prema kojoj su dva predmeta istoga reda istovjetna ako i samo ako su im zajednička sva svojstva neposredno višega reda, u kumulativnoj nam teoriji nije od pomoći. U nekumulativnoj teoriji predmetima reda t mogu se priricati samo predmeti reda $t+1$ i stoga je nekumulativna definicija sasvim primjerena. No, u kumulativnoj teoriji dva predmeta reda t načelno mogu imati zajednička sva svojstva reda $t+1$, ali razlikovati se prema svojstvima redova viših od $t+1$. Stoga je nekumulativna definicija nezadovoljavajuća za sustav poput KIRTT-a.

No, umjesto leibnizovske definicije istovjetnosti, moguće je istovjetnost uvesti na sljedeći način. Proširimo jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ prebrojivim brojem dvomjesnih konstanti, npr. $=^1$, $=^3$, ..., $=^\omega$. Definiciji formule dodajmo uvjet da, ako su τ^{t_1} i υ^{t_2} oznake, onda je $\tau^{t_1} =^u \upsilon^{t_2}$ formula za svaki $u > t_1, t_2$. Nazovimo tako dobiveni jezik '$\mathcal{L}^{=}_{\mathsf{KIRTT}}$'. U definiciji okvira za $\mathcal{L}^{=}_{\mathsf{KIRTT}}$, prikladno preinačimo definiciju okvira za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i dodajmo sljedeća dva uvjeta:

(i) $\mathcal{E}(\mathcal{I}(=^t)) = \{\langle O, O\rangle \mid O \in Int(t-1)\}$, *za svaki* $t < \omega$,

(ii) $\mathcal{E}(\mathcal{I}(=^\omega)) = \cup\mathcal{E}(\mathcal{I}(=^t))$.

Očito neformalno razumijevanje jest da je $\mathcal{I}(=^\omega)$ ideja istovjetnosti, koja se odnosi na sve predmete konačnoga reda. $\mathcal{I}(=^t)$ njezina je reifikacija reda t; ona se odnosi na sve predmete koji su reda manjega od t. Iako formula ϕ u pripročnome apstraktu $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle$ ne bi mogla sadržavati $=^\omega$, apstrakti čije prateće formule sadrže simbole istovjetnosti konačnih redova, poput npr. $\langle\lambda x^0.\langle\lambda z^4.z^4 =^5 x^0\rangle(=^3)\rangle$, bili bi dopušteni. Na sličan način kao s istovjetnošću, možemo postupiti i u slučaju drugih ideja.[107]

Definicija okvira dala nam je značenje za konstante našega jezika. Definirajmo sada znače-

[107] U formalnoj teoriji intenzionalnih entiteta koja kao predmete u domenama ne bi imala (samo) pojmove, već (također i) stavke različitih redova, mogli bismo uvesti poseban djelatelj apstrakcije koji bi nominalizirao formule u imena stavaka, a $\neg$ i $\vee$ (i druge poveznike) shvatiti, kao npr. Russell u svojoj supstitucijskoj teoriji, ne kao *rečenične* poveznike već kao oznake za relacije između entiteta (tj. stavaka). Tada bismo mogli uvesti $\neg^\omega$ i $\vee^\omega$ analogno predloženomu načinu za uvođenje $=^\omega$.

nje i ostalih oznaka.

Definicija 17. (Vrjednovanje varijabla)
Funkcija v vrjednovanje je varijabla u kumulativnome poopćenome Henkinovu okviru $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ akko v svakoj varijabli reda t pridružuje neki član skupa $Int(t)$.

Definicija 18. (Inačica vrjednovanja varijabla)
Funkcija w inačica je vrjednovanja varijabla v s obzirom na varijablu $\mathbf{x}$ akko je w vrjednovanje varijabla koje se od v razlikuje najviše po tome što $w(\mathbf{x}) \neq v(\mathbf{x})$.

Drugim riječima, ako vrjednovanje w svakoj varijabli, osim možda **x**-u, pridružuje istu vrijednost kao i vrjednovanje v, w je inačica vrjednovanja v s obzirom na **x**. Skrećeno ćemo kazati da je w **x**-inačica od v. Očito, ako je w **x**-inačica od v, onda je i v **x**-inačica od w.

Definicija 19. (Apstraktno označavanje)
Funkcija $\mathcal{A}$ apstraktno je označavanje u kumulativnome poopćenome Henkinovu okviru $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ akko $\mathcal{A}$ zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

1. Za svako vrjednovanje v u $\mathcal{M}$ i za svaki apstrakt $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$ reda t jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, $\mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle) \in Int(t)$.

2. Za svako vrjednovanje v u $\mathcal{M}$ i za svaki zatvoreni apstrakt $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$ reda t jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, $\mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle) \in \mathcal{H}(t)$.

Razlika između 1. i 2. uvjeta u gornjoj definiciji u tome je što u 2. govorimo samo o zatvorenim apstraktima, tj. apstraktima koji ne sadrže slobodne pojavke varijabla. Neformalno govoreći, ako apstrakt ne sadrži slobodne varijable, njegovo je značenje potpuno određeno, tj. ne ovisi o tome koje predmete pridružujemo slobodnim varijablama. Stoga apstrakt reda t jednostavno označuje neko svojstvo reda t, element skupa $\mathcal{H}(t)$. Međutim, kako vrjednovanje može varijabli pridružiti predmet koji je nižega reda od reda varijable, ako apstrakt sadrži slobodne varijable, kojega je reda predmet označen apstraktom, može ovisiti o tome koje predmete vrjednovanje pridružuje varijablama. Na primjer, apstrakt $\langle \lambda x^0 . y^3(x^0) \rangle$ neformalno razumijemo kao atribut "biti pojedinačnost koja ima svojstvo y^3". No, dok nije određeno značenje varijable y^3, ne znamo o kojem se atributu točno radi niti kojega je ono zapravo reda. Za vrjednovanje koje varijabli y^3 pridružuje predmet $\mathcal{I}(c^3)$, atribut u pitanju je "pojedinačnost koja ima svojstvo $\mathcal{I}(c^3)$", a njegov je red 4; za vrjednovanje koje varijabli y^3 pridružuje predmet $\mathcal{I}(d^1)$, atribut je "pojedinačnost koja ima svojstvo $\mathcal{I}(d^1)$", a njegov je red 2. Stoga se 1. uvjetom definicije zahtijeva samo da $\mathcal{A}$ apstraktu pridruži neki predmet iz $Int(t)$, ne nužno iz $\mathcal{H}(t)$. (Kako vrjednovanje, po definiciji, varijabli reda t ne može pridružiti predmet reda višega od t, predmet označen apstraktom mora biti u $Int(t)$.)

Definicijom apstraktnoga označavanja tražimo samo da λ-apstrakti imaju *neko* značenje. Malo niže, postavit ćemo dodatan uvjet, u smislu da to značenje mora biti primjereno. Kako definicija toga uvjeta ovisi o definiciji istinitosti formula, najprije moramo definirati što za formulu znači biti istinitom u okviru $\mathcal{M}$.[108]

Definicija 20. (Značenje oznake)
Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, v neka je vrjednovanje varijabla, a $\mathcal{A}$ apstraktno označavanje. Za svaku oznaku τ, značenje oznake vrijednost je funkcije $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})$, koju definiramo na sljedeći način:

1. za svaku konstantu $\mathbf{c}$, $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{c}) = \mathcal{I}(\mathbf{c})$,

2. za svaku varijablu $\mathbf{x}$, $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$,

3. za svaki apstrakt $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$, $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle) = \mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$.

Definicija 21. (Istinitost formule)
Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, v neka je vrjednovanje varijabla, a $\mathcal{A}$ apstraktno označavanje. Istinitost formule ϕ jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ u $\mathcal{M}$ s obzirom na v i $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$, definiramo na sljedeći način:

1. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \tau(v)$ *akko* $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(v) \in \mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau))$,

2. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \neg\phi$ *akko nije tako da* $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$,

3. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} (\phi \vee \psi)$ *akko bilo* $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$ *bilo* $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi$,

[108] Umjesto uobičajenoga pristupa, kojim bi se najprije definirala zadovoljenost formule vrjednovanjem v, a zatim istinitost *iskaza* kao zadovoljenost svakim vrjednovanjem, radi jednostavnosti slijedimo Fittinga u [21] i definiramo istinitost izravno za formule jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

4. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \forall \mathbf{x}^t.\phi$ *akko* $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \phi$*, za svako vrjednovanje varijabla* w *koje je* $\mathbf{x}^t$*-inačica vrjednovanja* v*.*

U definiciji istinitosti, intenzionalnost je izražena 1. točkom: $\tau(\upsilon)$ istinito je ako i samo ako je predmet označen oznakom υ u *opsegu* predmeta označenoga oznakom τ. Kumulativnost imamo u 4. točki. Prema definiciji vrjednovanja varijabla, vrjednovanje varijablama reda t pridružuje predmete reda manjega ili jednakoga t. Stoga je $\forall \mathbf{x}^t.\phi$ istinito ako i samo ako je formula ϕ zadovoljena svakim predmetom iz $Int(t)$, ne samo svakim predmetom iz $\mathcal{H}(t)$. Drugim riječima, formulom $\forall \mathbf{x}^t.\phi$ tvrdimo da ϕ vrijedi za svaki predmet iz kumulativne Henkinove domene $Int(t)$.

Korisno je ovdje uvesti pomoćnu notaciju za tvrdnju da je formula istinita za neku inačicu vrjednovanja varijabla v s obzirom na varijablu **x**.

Definicija 22. ($\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi[\mathbf{x}/O]$)
Neka je v *vrjednovanje varijabla i neka je* w $\mathbf{x}^t$*-inačica od* v*, takva da, za neki* $O^t \in Int(t)$*,* $w(\mathbf{x}^t) = O^t$*. Tada* $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi[\mathbf{x}^t/O^t]$ *akko* $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \phi$*.*

Definiciju istinitosti općega iskaza sada možemo parafrazirati na sljedeći način:

4'. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \forall \mathbf{x}^t.\phi$ *akko* $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi[\mathbf{x}^t/O^t]$ *za svaki* $O^t \in Int(t)$*.*

Apstraktno označavanje $\mathcal{A}$, kako smo rekli, osigurava samo da svaki apstrakt označava neki predmet u odgovarajućoj kumulativnoj domeni $Int(t)$. Definicijom primjerenoga apstraktnoga označavanja zahtijevat ćemo da je predmet koji apstraktno označavanje pridružuje apstraktu "ispravan" predmet. Naime, $\langle \lambda \mathbf{x}^t.\phi \rangle$ neformalno razumijemo kao ime svojstva "biti predmet iz $Int(t)$ koji zadovoljava ϕ" i stoga bi predmet označen apstraktom morao kao svoju ekstenziju imati upravo one elemente kumulativne Henkinove domene $Int(t)$ koji zadovoljavaju ϕ. No, prije nego što definiramo uvjete za primjereno apstraktno označavanje, moramo još definirati vrjednovanje v^σ, koje svakoj varijabli pridružuje predmet označen onom oznakom koju supstitucija σ pridružuje toj varijabli.

Definicija 23. (v^σ)
Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, a $\mathcal{A}$ neka je apstraktno označavanje u $\mathcal{M}$. Za svaku supstituciju σ definiramo vrjednovanje v^σ, takvo da $v^\sigma(\mathbf{x}) = (v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{x}\sigma)$.

Definicija 24. (Primjereno apstraktno označavanje)
Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, a $\mathcal{A}$ neka je apstraktno označavanje u $\mathcal{M}$. Kažemo da je $\mathcal{A}$ primjereno akko za svaki λ-apstrakt $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$ vrijede sljedeći uvjeti:

1. $\mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)) = \{O \,|\, \mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi[\mathbf{x}/O]\}$,

2. $\mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle) = \mathcal{A}(w, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$, za sva vrjednovanja v i w takva da, za svaku slobodnu varijablu $\mathbf{y}$ u $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$, $v(\mathbf{y}) = w(\mathbf{y})$,

3. $\mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle \sigma) = \mathcal{A}(v^\sigma, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$, za svaku supstituciju σ koja je primjerena za $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$.

Na gornjoj se definiciji vrijedi malo zadržati. Prvi uvjet kaže da, za vrjednovanje v, funkcija $\mathcal{A}$ mora apstraktu $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$ pridružiti predmet kojemu funkcija $\mathcal{E}$ pridružuje (kao ekstenziju) skup upravo onih predmeta koji zadovoljavaju formulu ϕ. Malo preciznije govoreći, ekstenzija pojma $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$ mora sadržavati upravo one predmete O za koje je ϕ istinita u vrednovanju w, takvom da je w $\mathbf{x}$-inačica od v i $w(\mathbf{x}) = O$. To je očit uvjet, s obzirom na intendirano neformalno značenje λ-apstrakta.

Drugi uvjet kaže da značenje apstrakta ovisi o vrjednovanjima varijabla samo preko značenja koja vrjednovanja pridružuju slobodnim varijablama u apstraktu. Za sva vrjednovanja koja se slažu u vrijednostima koje pridružuju slobodnim varijablama u λ-apstraktu, $\mathcal{A}$ mora apstraktu pridružiti isti predmet da bi $\mathcal{A}$ bilo primjereno označavanje. To ujedno znači da vrjednovanje varijabla nema nikakvu ulogu ako je λ-apstrakt zatvorena oznaka. Taj nam je uvjet potreban za dokaz stavka 2 malo niže.

Treći je uvjet također intuitivno jasan. Imamo li, na primjer, apstrakt $\langle \lambda x^2.x^2(y^1) \rangle$ i vrjednovanje v takvo da $v(y^1) = \mathcal{I}(c^0)$, želimo da $\mathcal{A}$, za vrjednovanje v, pridruži tomu apstraktu istu vrijednost koju pridružuje apstraktu $\langle \lambda x^2.x^2(y^1) \rangle \{y^1/c^0\}$, tj. apstraktu $\langle \lambda x^2.x^2(c^0) \rangle$. Neformalno, ako varijabla y^1 označava isti predmet kao i c^0, onda apstrakt $\langle \lambda x^2.x^2(y^1) \rangle$ znači isto što i apstrakt $\langle \lambda x^2.x^2(c^0)\rangle$. Naravno, σ mora biti ne samo slobodna za $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi\rangle$ već i primjerena, tj. $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi\rangle\sigma$ mora biti oznaka. Taj nam uvjet treba za dokaz stavka 3.

Primijetimo da ništa u definiciji ne jamči da je funkcija $\mathcal{A}$ jedinstvena u okviru $\mathcal{M}$. Kako različiti predmeti mogu imati iste ekstenzije, moguća su različita apstraktna označavanja koja zadovoljavaju navedena tri uvjeta. Svako apstraktno označavanje koje zadovoljava te uvjete smatramo primjerenim.

S posljednjom definicijom u rukama, konačno možemo definirati model za KIRTT i dati očekivane definicije valjanosti, zadovoljivosti i semantičkoga slijeda.

Definicija 25. (Model)
Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E}\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, a $\mathcal{A}$ neka je apstraktno označavanje u $\mathcal{M}$. Ako je $\mathcal{A}$ primjereno apstraktno označavanje, struktura $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ je kumulativni pooopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Definicija 26. (Valjanost, zadovoljivost, semantička posljedica)
Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, ϕ i ψ neka su formule, a Γ skup formula jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

ϕ je valjana, tj. $\models \phi$, akko $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$ za svaki model $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ i svako tumačenje varijabla v.

Γ je zadovoljiv u modelu $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ akko postoji vrjednovanje varijabla v takvo da $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$ za svaku $\phi \in \Gamma$.

ϕ je semantička posljedica skupa Γ, tj. $\Gamma \models \phi$, akko, za svaki model $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ i svako vrjednovanje varijabla v, ako $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi$ za svaku $\psi \in \Gamma$, onda $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$.

Na kraju ovoga odsječka ostalo nam je za dokazati dva jednostavna ali važna stavka koja nam trebaju za dokaz pouzdanosti u idućem odsječku. Prvi nam stavak kaže da je razlika između vrjednovanja glede varijabla koje nisu slobodne u oznaci (odnosno formuli) irelevantna za značenje oznake (odnosno istinitost formule). Izravna je posljedica toga da značenje zatvorenih oznaka i istinitost iskazā ne ovise o vrjednovanju varijabla, tj. da je značenje zatvorene oznake i istinitosna vrijednost iskaza ista za sva vrjednovanja varijabla. Drugi stavak kaže da se supstitucija σ i vrjednovanje v^σ u oznakama i formulama međusobno odnose na odgovarajući način.

Stavak 2. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i neka su v i w vrjednovanja varijabla.*

1. Ako $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ za svaku slobodnu varijablu $\mathbf{x}$ u oznaci τ, onda $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$.

2. Ako $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ za svaku slobodnu varijablu $\mathbf{x}$ u formuli ϕ, onda $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$ akko $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \phi$.

Dokaz. Dokaz je potpunom indukcijom prema stupnju oznaka i formula. Neka stavak vrijedi za sve oznake i formule stupnja manjega od k. Dokažimo da stavak tada vrijedi i za sve oznake i formule stupnja k.

2. 1. Neka je τ oznaka stupnja k i $k = 0$. Ako $k = 0$, onda je τ ili neka konstanta **c** ili neka varijabla **x**. Prema definiciji značenja oznaka (D 20), ako je τ konstanta **c**, onda $(v*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\tau) = \mathcal{I}(\mathbf{c}) = (w*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\tau)$. Ako je τ pak varijabla **x**, onda $(v*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\tau) = v(\mathbf{x})$ i $(w*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\tau) = w(\mathbf{x})$. No, po pretpostavci se v i w slažu u svakoj slobodnoj varijabli u τ pa $v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ i stoga $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$.

Neka je τ oznaka stupnja $k \neq 0$. Tada je τ neki apstrakt $\langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle$ pa vrijedi $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau) = \mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$ i $(w*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\tau) = \mathcal{A}(w, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$. No, prema definiciji primjerenoga apstraktnoga označavanja (D 24, 2.), kako se v i w prema pretpostavci slažu za svaku slododnu varijablu u τ, $\mathcal{A}(v, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle) = \mathcal{A}(w, \langle \lambda \mathbf{x}.\phi \rangle)$ i stoga $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$.

2. 2. Neka je ϕ formula stupnja k. Prema tvorbenim pravilima, četiri su moguća slučaja: ϕ je ili $\tau_1(\tau_2)$ ili $\neg\psi$ ili $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ili $\forall \mathbf{x} \psi$. Dokazat ćemo posebno da u svima četirima slučajevima vrijedi 2. točka stavka.

(i) Neka je $\phi = \tau_1(\tau_2)$. Tada su τ_1 i τ_2 stupnja $\leq k$. Također, ako se v i w slažu u svim slobodnim varijablama u $\tau_1(\tau_2)$, onda se slažu i u svim slobodnim varijablama u τ_1 i u svim slobodnim varijablama u τ_2. Dokazali smo gore da 1. točka stavka vrijedi za sve oznake stupnja $\leq k$ pa stoga $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_1) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_1)$ i $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_2) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_2)$. No onda, prema definiciji istinitosti formule (D 21), vrijedi sljedeće:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \tau_1(\tau_2)$ akko

$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_2) \in \mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_1))$ akko

$(w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_2) \in \mathcal{E}((w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_1))$ akko

$\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \tau_1(\tau_2)$.

(ii) Neka je $\phi = \neg\psi$. Po pretpostavci, vrjednovanja v i w slažu se za svaku slobodnu varijablu u ϕ i time se slažu i za svaku slobodnu varijablu u ψ. Formula ψ je stupnja $< k$ pa za nju vrijedi induktivna hipoteza. Imamo stoga:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \neg\psi$ akko

nije tako da $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi$ akko

nije tako da $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \psi$ akko

$\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \neg\psi$.

(iii) Neka je $\phi = (\psi_1 \vee \psi_2)$. Vrjednovanja v i w neka se slažu za svaku slobodnu varijablu u ϕ. ψ_1 i ψ_2 stupnja su $< k$ pa za njih vrijedi induktivna hipoteza. Vrijedi onda sljedeće:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} (\psi_1 \vee \psi_2)$ akko

bilo $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi_1$ bilo $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi_2$ akko

bilo $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \psi_1$ bilo $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \psi_2$ akko

$\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} (\psi_1 \vee \psi_2)$.

(iv) Neka je $\phi = \forall\mathbf{x}\psi$. Po pretpostavci, v i w slažu se za sve slobodne varijable u $\forall\mathbf{x}\psi$. Neka je v' **x**-inačica od v, a w' **x**-inačica od w. Primijetimo da formula ψ kao slobodne varijable sadrži sve slobodne varijable formule $\forall\mathbf{x}\psi$ i još ktomu najviše **x**. Stoga, ako se v i w slažu za sve slobodne varijable u $\forall\mathbf{x}\psi$, za svaki predmet O i svako v' i w' vrijedi da, ako $v'(\mathbf{x}) = O = w'(\mathbf{x})$, onda se v' i w' slažu za sve varijable slobodne u ψ. Tada, kako je ψ stupnja $< k$, prema induktivnoj hipotezi vrijedi $\mathcal{M} \models_{v',\mathcal{A}} \psi$ akko $\mathcal{M} \models_{w',\mathcal{A}} \psi$. Kako za svako v' postoji w' takvo da se v' i w' slažu za sve slobodne varijable u ψ i kako za svako w' postoji v' takvo da se v' i w' slažu za sve slobodne varijable u ψ, slijedi da je ψ istinita za svako v' akko je istinita za svako w'. Imamo, dakle, sljedeće:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \forall\mathbf{x}\psi$ akko

$\mathcal{M} \models_{v',\mathcal{A}} \psi$, za svaku **x**-inačicu vrjednovanja v, akko

$\mathcal{M} \models_{w',\mathcal{A}} \psi$, za svaku **x**-inačicu vrjednovanja w, akko

$\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \forall \mathbf{x}\psi$.

Time smo indukcijom dokazali da stavak vrijedi za sve oznake i formule jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. □

Korolarij 1. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i neka su v i w bilo koja dva vrjednovanja varijabla.*

1. $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$, za svaku zatvorenu oznaku τ.

2. $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi$ akko $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \phi$, za svaki iskaz ϕ.

Dokaz. Zatvorene oznake i iskazi po definiciji ne sadrže slobodne varijable pa korolarij izravno slijedi iz stavka 2. □

Prije nego krenemo dokazivati idući stavak, moramo dokazati jedan tehnički rezultat koji će nam zatrebati u dokazu stavka za opće formule.

Lema 1. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Za svako vrjednovanje varijabla v, svaku supstituciju σ i svaku formulu ψ vrijedi sljedeća tvrdnja: ako je σ primjerena za $\forall \mathbf{x}\psi$, onda za svako w koje je* **x***-inačica vrjednovanja v i za svako u koje je* **x***-inačica vrjednovanja v^{σ}, vrijedi $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$ za svaku slobodnu varijablu* **y** *u $\forall \mathbf{x}\psi$.*

Dokaz. Neka je **y** slobodna varijabla u $\forall \mathbf{x}\psi$. Prema definiciji 23, imamo sljedeću jednakost:

$$w^{\sigma_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{y}\sigma_{\mathbf{x}}).$$

Varijabla **y** je slobodna u $\forall \mathbf{x}\psi$ pa zato **y** nije **x**. Kako se $\sigma_{\mathbf{x}}$ i σ razlikuju samo prema oznakama koje pridružuju varijabli **x**, vrijedi da je $\mathbf{y}\sigma_{\mathbf{x}} = \mathbf{y}\sigma$ pa imamo:

$$(w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{y}\sigma_{\mathbf{x}}) = (w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{y}\sigma).$$

Po pretpostavci, supstitucija σ je primjerena za $\forall \mathbf{x}\psi$, stoga je i slobodna za $\forall \mathbf{x}\psi$. Kako je **y** slobodna u $\forall \mathbf{x}\psi$, $\mathbf{y}\sigma$ ne smije sadržavati **x** kao slobodnu varijablu (D 12). No ako $\mathbf{y}\sigma$ ne sadrži slobodan $\mathbf{x}$, a w je $\mathbf{x}$-inačica vrjednovanja v, w i v svim slobodnim varijablama u oznaci $\mathbf{y}\sigma$ pridružuju istu vrijednost. Tada je, prema stavku 2,

$$(w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{y}\sigma) = (v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{y}\sigma).$$

Iz definicije 23 i iz toga što je u $\mathbf{x}$-inačica vrjednovanja v^σ slijedi:

$$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{y}\sigma) = v^\sigma(\mathbf{y}),$$

$$v^\sigma(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}).$$

Time smo dokazali $w^{\sigma_\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$, za svaku slobodnu varijablu $\mathbf{y}$ u $\forall\mathbf{x}\psi$. $\square$

Stavak 3. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Sljedeće dvije tvrdnje vrijede za svaku supstituciju σ i svako vrjednovanje varijabla v.*

1. Ako je σ primjerena za oznaku τ, onda
$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau\sigma) = (v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$.

2. Ako je σ primjerena za formulu ϕ, onda
$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi\sigma$ akko $\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} \phi$.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu stavka 2. Pretpostavit ćemo da stavak vrijedi za sve oznake i formule stupnja $< k$, zatim dokazati da stavak onda vrijedi i za sve oznake stupnja $\leq k$, a potom da vrijedi i za sve formule stupnja $\leq k$. Kao i u stavku 2, morat ćemo se pozvati na definiciju primjerenoga apstraktnoga označavanja.

3\. 1. Neka je τ stupnja $k = 0$. Ako je $\tau = \mathbf{c}$, onda $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau\sigma) = \mathcal{I}(\mathbf{c}) = (v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$. Ako je $\tau = \mathbf{x}$, onda (zbog D 23 i D 20) $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau\sigma) = v^\sigma(\mathbf{x}) = (v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau)$.

Neka je $\tau = \langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle$. Po pretpostavci, σ je primjerena za $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle$ pa je $\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle\sigma$ također λ-apstrakt. Definicije značenja oznaka (D 20) i primjerenoga apstraktnoga označavanja (D 24, 3.) daju nam sljedeće jednakosti:

$$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle\sigma) = \mathcal{A}(v, \langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle\sigma),$$

$$\mathcal{A}(v, \langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle\sigma) = \mathcal{A}(v^\sigma, \langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle),$$

$$\mathcal{A}(v^\sigma, \langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle) = (v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle).$$

Dakle, $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle\sigma) = (v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\mathbf{x}.\phi\rangle)$. Time smo 1. točku stavka dokazali za sve oznake stupnja $\leq k$.

3. 2. Neka je ϕ formula stupnja k. Tvorbena pravila daju nam četiri moguća slučaja i stoga stavak moramo posebno dokazati za $\phi = \tau_1(\tau_2)$, $\phi = \neg\psi$, $\phi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ i $\phi = \forall \mathbf{x}\psi$.

(i) Neka je $\tau = \tau_1(\tau_2)$. Oznake τ_1 i τ_2 su stupnja $\leq k$, a za sve smo oznake dokazali da vrijedi 1. točka stavka. Stoga imamo:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \tau_1(\tau_2)\sigma$ akko

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \tau_1\sigma(\tau_2\sigma)$ akko

$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_2\sigma) \in \mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_1\sigma))$ akko

$(v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_2) \in \mathcal{E}((v^\sigma * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau_1))$ akko

$\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} \tau_1(\tau_2)$.

(ii) Neka je $\phi = \neg\psi$. Formula ψ je stupnja $< k$ pa za nju vrijedi induktivna hipoteza. Imamo stoga:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} [\neg\psi]\sigma$ akko

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \neg[\psi\sigma]$ akko

nije tako da $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi\sigma$ akko

nije tako da $\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} \psi$ akko

$\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} \neg\psi$.

(iii) Neka je $\phi = (\psi_1 \vee \psi_2)$. Formule ψ_1 i ψ_2 stupnja su $< k$ pa za njih vrijedi induktivna hipoteza. Vrijedi stoga sljedeće:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} (\psi_1 \vee \psi_2)\sigma$ akko

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} (\psi_1\sigma \vee \psi_2\sigma)$ akko

bilo $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi_1\sigma$ bilo $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi_2\sigma$ akko

bilo $\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} \psi_1$ bilo $\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} \psi_2$ akko

$\mathcal{M} \models_{v^\sigma,\mathcal{A}} (\psi_1 \vee \psi_2)$.

(iv) Neka je $\phi = \forall \mathbf{x}\psi$. Kako je σ, prema pretpostavci, primjerena za $\forall \mathbf{x}\psi$, $\sigma_{\mathbf{x}}$ je primjerena za ψ. Formula ψ je stupnja $< k$ pa za nju vrijedi induktivna hipoteza. Imamo stoga sljedeće:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} [\forall \mathbf{x}\psi]\sigma$ akko

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \forall \mathbf{x}[\psi\sigma_{\mathbf{x}}]$ akko

$\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \psi\sigma_{\mathbf{x}}$, za svaku **x**-inačicu w od v, akko

$\mathcal{M} \models_{w^{\sigma_{\mathbf{x}}},\mathcal{A}} \psi$, za svaku **x**-inačicu w od v.

Lemom 1 dokazali smo da, ako je σ primjerena za $\forall \mathbf{x}\psi$, za svako w koje je **x**-inačica vrjednovanja v i svako u koje je **x**-inačica vrjednovanja v^{σ}, za svaku slobodnu varijablu **y** u $\forall \mathbf{x}\psi$ vrijedi $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$. Primijetimo da formula ψ sadrži sve slobodne varijable iz $\forall \mathbf{x}\psi$ i još ktomu najviše varijablu **x**. No tada se za svaku **x**-inačicu vrjednovanja v (tj. za svako w), svaku **x**-inačicu vrjednovanja v^{σ} (tj. za svako u) i svaki predmet O, takve da $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = O = u(\mathbf{x})$, vrjednovanja $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}$ i u slažu za *svaku* varijablu slobodnu u ψ. U tome je slučaju, prema stavku 2, $\mathcal{M} \models_{w^{\sigma_{\mathbf{x}}},\mathcal{A}} \psi$ akko $\mathcal{M} \models_{u,\mathcal{A}} \psi$. Dakle, kako za svako $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}$ postoji neko u takvo da se $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}$ i u slažu za sve slobodne varijable u ψ i kako za svako u postoji neko $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}$ takvo da se u i $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}$ slažu za sve slobodne varijable u ψ, ψ je istinita za svako vrjednovanje $w^{\sigma_{\mathbf{x}}}$ ako i samo ako je istinita za svako vrjednovanje u. Stoga vrijedi:

$\mathcal{M} \models_{w^{\sigma_{\mathbf{x}}},\mathcal{A}} \psi$, za svaku **x**-inačicu w od v, akko

$\mathcal{M} \models_{u,\mathcal{A}} \psi$, za svaku **x**-inačicu u od v^{σ}, akko

$\mathcal{M} \models_{v^{\sigma},\mathcal{A}} \forall \mathbf{x}\psi$.

Dakle, $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} [\forall \mathbf{x}\psi]\sigma$ akko $\mathcal{M} \models_{v^{\sigma},\mathcal{A}} \forall \mathbf{x}\psi$.

Time smo dovršili dokaz da stavak 3 vrijedi za sve oznake i formule jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. $\square$

Završili smo s opisom osnovne semantike. U idućemu odsječku proširujemo jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ dodajući mu tzv. parametre, a zatim, u posljednjemu odsječku poglavlja, dajemo pravila za metodu istinitosnoga stabla (*tableau*) za KIRTT i razmatramo pitanje pouzdanosti i potpunosti.

3.4 Jezik $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$

Neka je V^{+} skup prebrojivo mnogo varijabla svakoga reda, koje nisu dio jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Neka je $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ jezik koji je poput jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, ali kojemu su u osnovni rječnik dodane varijable iz V^{+}, pod uvjetom da tvorbena pravila ne dopuštaju vezanje varijabla iz V^{+} djelateljima $\forall$ i λ.

Drugim riječima, dodajemo jeziku $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ nove varijable, ali te su varijable u oznakama i formulama tako dobivenoga jezika uvijek slobodne. Sve oznake i formule jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ očito su također oznake i formule jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Sve *zatvorene* oznake i formule jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ ujedno su zatvorene oznake i formule jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Nove varijable, članove skupa V^{+}, nazivat ćemo 'parametri'. Varijable jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$, bilo da se nalaze u V^{+} ili ne, označavat ćemo malim slovima s početka grčkoga alfabeta, ponegdje s različitim pokazateljima. Slovo 'p', s pokazateljima ili bez njih, bit će nam metavarijabla za parametre. Metavarijable za oznake i formule ostavit ćemo kakve su i bile, ali imati na umu da sada govorimo o oznakama i formulama proširenoga jezika.

Zašto dodajemo parametre u $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$? Metoda stabla, koju ćemo opisati u idućemu odsječku, postupak je za dokazivanje iskazā jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Međutim, neka pravila za stablo zahtijevaju uporabu varijabla koje se ne javljaju u $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$; stoga moramo jezik proširiti u $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Problem je što sad trebamo neko jamstvo da uvođenje novih varijabla ne utječe na istinitost iskaza iz $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$: iako nove varijable ne mogu biti vezane, jezik $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ sadrži otvorene formule i projčne apstrakte kojih nema u $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ pa nije samo po sebi očito da istinitosna vrijednost iskazā ostaje nepromijenjena, tj. da s dokazom u jeziku $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ doista imamo dokaz iskaza polaznoga jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Stoga nam je potreban sljedeći poučak:

Poučak 1. *Svaki kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ može se preinačiti u kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ tako da istinitosna vrijednost formula iz $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ ostane nepromijenjena.*

Potpuni dokaz poučka bio bi suviše dug, zahtijevao zadržavanje na mnogim detaljima i ponavljanje koraka sličnih onima u dokazima prethodnih stavaka. Stoga ćemo se zadovoljiti time da, na temelju Fittingove sugestije [21, str. 31] za analogan poučak za njegovu nekumulativnu intenzionalnu jednostavnu teoriju tipova, opišemo osnovnu strukturu dokaza, izvedemo osnovne korake i uputimo kako nadopuniti nedostajuće detalje.

Primijetimo najprije da, ako je $\langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov okvir za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, kako $\langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ ne ovisi o tome koje varijable jezik sadrži, $\langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ ujedno je kumulativni poopćeni okvir za jezik $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Ono što nam treba, dakle, nekakva je odgovarajuća funkcija $\mathcal{A}'$ apstraktnoga označavanja za apstrakte iz $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ koja je primjerena u $\langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ –

čime bi $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}' \rangle$ bio model za $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$ – takva da su u modelu $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}' \rangle$ istinite sve i samo one formule jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje su istinite u modelu $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Definirati takvu funkciju $\mathcal{A}'$ uloga je narednih dviju definicija koje ćemo najprije samo navesti, a zatim ih malo obrazložiti.

Definicija 27. ($v\{\beta_1/\alpha_1, ..., \beta_n/\alpha_n\}$)
Ako je v vrjednovanje varijabla, onda je $v\{\beta_1/\alpha_1, ..., \beta_n/\alpha_n\}$ vrjednovanje varijabla takvo da, za $i \in \{1, ..., n\}$, $v\{\beta_1/\alpha_1, ..., \beta_n/\alpha_n\}(\alpha_i) = v(\beta_i)$, a za svaku varijablu γ različitu od α_i, vrijedi $v\{\beta_1/\alpha_1, ..., \beta_n/\alpha_n\}(\gamma) = v(\gamma)$.

Definicija 28. ($\mathcal{A}'$)
Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i neka su $\beta_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}$ svi parametri u apstraktu $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$ jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$. Neka su $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$ varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje se ne nalaze u ϕ, bilo slobodne bilo vezane. Apstraktno označavanje $\mathcal{A}'$ definiramo tada na sljedeći način: $\mathcal{A}'(v, \langle \lambda\gamma.\phi \rangle) = \mathcal{A}(v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}, \langle \lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} \rangle)$, za svaki apstrakt $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$ i svako vrjednovanje varijabla v jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$.

Kako smo rekli, tražimo odgovarajuće apstraktno označavanje za apstrakte iz proširenoga jezika. Ideja je sljedeća. Uzmimo bilo koji λ-apstrakt $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$ iz $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$. $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ smo proširili samo varijablama koje ne mogu biti vezane pa su sve varijable koje su u apstraktu vezane naše polazne varijable, tj. nijedna vezana varijabla nije parametar. Zamijenimo sve "nove" varijable koje se nalaze u apstraktu (tj. $\beta_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}$) "starim" varijablama odgovarajućega reda (tj. $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$), pazeći pritom da se nijedna od njih već ne nalazi u njemu, kako ne bismo promijenili "smisao" apstrakta. Tako dobiveni apstrakt, $\langle \lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} \rangle$, kako sadrži samo stare varijable, apstrakt je polaznoga jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Kako je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, $\mathcal{A}$ je, prema definiciji modela, primjereno apstraktno označavanje za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Funkcija $\mathcal{A}$ apstraktu $\langle \lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} \rangle$, za svako vrjednovanje varijabla, pridružuje neki predmet iz odgovarajuće domene. Na primjer, za vrjednovanje w pridružuje mu O. Uzmimo sada funkciju koja upravo taj predmet O pridružuje apstraktu $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$ za vrjednovanje $w\{\alpha_1^{t_1}/\beta_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}/\beta_n^{t_n}\}$, tj. za vrjednovanje koje je kao i w, samo što parametrima u apstraktu pridružuje one vrijednosti koje w pridružuje varijablama kojima smo supstitucijom $\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ zamijenili parametre u $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$ (a jednako i za ostala vrjednovanja i za druge apstrakte iz $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$). To je funkcija

$\mathcal{A}'$, kako smo ju gore definirali.

Kako supstitucija $\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ svaki parametar iz $\langle\lambda\gamma.\phi\rangle$ supstituira varijablom koja je istoga reda kao i parametar, $\langle\lambda\gamma.\phi\rangle$ i $\langle\lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}\rangle$ apstrakti su istoga reda. Stoga $\mathcal{A}'$ svakom apstraktu iz $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$ pridružuje predmet iz odgovarajuće domene pa je $\mathcal{A}'$, po definiciji, apstraktno označavanje. Tvrdimo sada da je $\mathcal{A}'$ *primjereno* apstraktno označavanje za okvir $\langle\mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E}\rangle$. Ako je tako, onda je $\langle\mathcal{M}, \mathcal{A}'\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$.

Da bismo dokazali da je $\mathcal{A}'$ primjereno apstraktno označavanje, moramo dokazati da $\mathcal{A}'$ zadovoljava tri uvjeta iz definicije 24. No, prije dokaza da $\mathcal{A}'$ zadovoljava definiciju 24, morat ćemo prethodno dokazati dva stavka koji, primijetimo, strukturom otprilike odgovaraju stavcima 2 i 3.

Stavak 4. *Neka je $\langle\mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i neka je v vrjednovanje varijabla jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$.*

1. Za svaku oznaku τ jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$, ako su $\beta_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}$ svi parametri u τ, a $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$ varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje se ne nalaze u τ, onda

$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\tau) = (v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\})$.

2. Za svaku formulu ϕ jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$, ako su $\beta_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}$ svi parametri u ϕ, a $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$ varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje se ne nalaze u ϕ, onda

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}'} \phi$ *akko* $\mathcal{M} \models_{v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}} \phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$.

Prvi dio stavka uspostavlja vezu između značenja oznaka jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$ (s lijeve strane onoga 'akko') i značenja odgovarajućih oznaka jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ (s desne strane.) Drugi dio stavka to čini za istinitosne vrijednosti formula. Prisjetimo se, $\mathcal{M}$ je zajednički okvir za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$, $\mathcal{A}$ je primjereno apstraktno označavanje u $\mathcal{M}$ za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, a $\mathcal{A}'$ apstraktno označavanje (za koje još ne znamo je li primjereno) u $\mathcal{M}$ za $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$. Vrjednovanje v vrjednovanje je varijabla jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$ pa time ujedno i vrjednovanje varijabla jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Kako je svaki apstrakt jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ ujedno i apstrakt jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$, apstraktno označavanje $\mathcal{A}'$ ujedno je apstraktno označavanje za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Dokaz. Dokaz je, naravno, indukcijom po stupnju: pretpostavimo da stavak vrijedi za sve oznake i formule stupnja $< k$ i dokažimo da onda vrijedi i za sve oznake i formule stupnja k. Dokazat ćemo stavak samo za oznake i atomarne formule, ostatak dokaza slijedi poznati obrazac.

4. 1. Neka je τ stupnja $k = 0$. Tada je τ ili neka konstanta **c** ili neka varijabla γ. Neka je $\tau = \mathbf{c}$. Supstitucija, prema definiciji, konstante ostavlja nepromijenjenima pa $\mathbf{c}\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} = \mathbf{c}$. Stoga, $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\mathbf{c}) = \mathcal{I}(\mathbf{c}) = (v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\mathbf{c}\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\})$. Neka je $\tau = \gamma$. Prema pretpostavci, $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$ ne nalaze se u τ pa je stoga γ različita od svake α_i. No onda je, prema definiciji 27, $v(\gamma) = v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}(\gamma)$. Neka je za svaki $i \in \{1, ..., n\}$, $\gamma \neq \beta_i$. Tada je $\gamma = \gamma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ i stoga imamo $(v*\mathcal{I}*\mathcal{A}')(\gamma) = v(\gamma) = v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}(\gamma) = (v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\gamma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\})$. Neka je $\gamma = \beta_i$ za neki $i \in \{1, ..., n\}$. Onda je $\gamma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} = \alpha_i$, dok je, prema definiciji 27, $v(\beta_i) = v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}(\alpha_i)$ pa time imamo sljedeći niz jednakosti:

$$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\gamma) =$$

$$v(\gamma) =$$

$$v(\beta_i) =$$

$$v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}(\alpha_i) =$$

$$v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}(\gamma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}) =$$

$$(v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\gamma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}).$$

Neka je τ stupnja $k \neq 0$. Tada je $\tau = \langle\lambda\gamma.\phi\rangle$. Prema definiciji 28, $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\langle\lambda\gamma.\phi\rangle) = (v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}*\mathcal{I}*\mathcal{A})(\langle\lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}\rangle)$. Kako je γ vezana, ona nije parametar pa vrijedi $\gamma \neq \beta_i$ za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Stoga su, po definiciji, $\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ i $\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}_\gamma$ iste supstitucije pa, uz pomoć definicije 11, imamo:

$$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\langle\lambda\gamma.\phi\rangle) =$$

$$(v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}\rangle) =$$

$$(v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}_\gamma\rangle) =$$

$$(v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda\gamma.\phi\rangle\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}).$$

Dokazali smo time da stavak vrijedi za svaku oznaku stupnja $\leq k$.

4. 2. Neka je ϕ formula stupnja k. Prema tvorbenim pravilima, imamo četiri oblika formula. Dokažimo da stavak vrijedi za $\phi = \tau(\upsilon)$. Oznake τ i υ stupnja su $\leq k$, a dokazali smo gore da za njih vrijedi 1. točka stavka. Stoga, uz pomoć definicija 21 i 11, vrijedi sljedeće:

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}'} \tau(\upsilon)$ akko

$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\upsilon) \in \mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\tau))$ akko

$(v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\upsilon\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}) \in$

$\mathcal{E}((v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}))$ akko

$\mathcal{M} \models_{v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}} \tau\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}(\upsilon\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\})$ akko

$\mathcal{M} \models_{v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}} \tau(\upsilon)\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$.

Stavak smo time dokazali za atomarne formule. Dokaz ostalih slučajeva vježba je u strpljenju, ali slijedi ustaljen postupak, analogno dokazu stavka 2. $\square$

Stavak 5. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Sljedeće dvije tvrdnje vrijede za svaku supstituciju σ i svako vrjednovanje varijabla v u $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$.*

1. Za svaku oznaku τ jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$, ako su $\beta_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}$ svi parametri u τ, a $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$ varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje se ne nalaze u τ, onda, ako je σ primjerena za τ,
$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\tau\sigma) = (v^\sigma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\tau\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\})$.

2. Za svaku formulu ϕ jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$, ako su $\beta_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}$ svi parametri u ϕ, a $\alpha_1^{t_1}, ..., \alpha_n^{t_n}$ varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje se ne nalaze u ϕ, onda, ako je σ primjerena za ϕ,
$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}'} \phi\sigma$ *akko* $\mathcal{M} \models_{v^\sigma\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}} \phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$.

Stavak 5 iznosimo ovdje bez dokaza, ali struktura dokaza slična je strukturi dokaza stavka 3, uz prikladnu uporabu definicije 28.

Konačno sada možemo dokazati da je $\mathcal{A}'$ primjereno apstraktno označavanje u $\langle \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$ i da je stoga $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}' \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$.

Stavak 6. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Neka su v i w vrjednovanja varijabla jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$, a σ supstitucija na $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Za svaki λ-apstrakt $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$ iz $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$, vrijede sljedeće tri tvrdnje:*

1. $\mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\langle \lambda\gamma.\phi \rangle)) = \{w(\gamma) \mid \mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}'} \phi$, za svako w koje je γ-inačica od $v\}$,

2. $\mathcal{A}'(v, \langle \lambda\gamma.\phi \rangle) = \mathcal{A}'(w, \langle \lambda\gamma.\phi \rangle)$, za sva vrjednovanja v i w takva da, za svaku slobodnu varijablu δ u $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$, $v(\delta) = w(\delta)$,

3. $\mathcal{A}'(v, \langle \lambda\gamma.\phi \rangle \sigma) = \mathcal{A}'(v^{\sigma}, \langle \lambda\gamma.\phi \rangle)$, za svaku supstituciju σ koja je primjerena za $\langle \lambda\gamma.\phi \rangle$.

Dokaz. Dokazat ćemo samo 1. točku stavka i uputiti na ključnu stvar za dokaz 2. i 3. točke.

6. 1. Iz definicije apstraktnoga označavanja $\mathcal{A}'$ (D 28) i toga da je $\mathcal{A}$ primjereno (jer je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ model), te uz uobičajeno značenje naših beta i alfi, vrijedi sljedeće:

$$\mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A}')(\langle \lambda\gamma.\phi \rangle)) =$$

$$\mathcal{E}((v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle \lambda\gamma.\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} \rangle)) =$$

$$\{u(\gamma) \mid \mathcal{M} \models_{u,\mathcal{A}} \phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},$$

za svako u koje je γ-inačica od $v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}\}$.

No kako, prema 2. točki stavka 4,

$\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}'} \phi$ akko

$\mathcal{M} \models_{v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}} \phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1}, ..., \beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$,

gornji je skup istovjetan skupu

$\{w(\gamma) \mid \mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}'} \phi$, *za svako* w *koje je* γ*-inačica od* $v\}$,

što dokazuje 1. točku stavka.

U dokazu 2. točke treba se pozvati na 1. točku stavka 4, a u dokazu 3. točke na 1. točku stavka 5. $\square$

Stavak 7. *Neka je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Tada je $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}' \rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$.*

Dokaz. Definicija kumulativnoga poopćenoga Henkinova okvira $\langle\mathcal{H},\mathcal{I},\mathcal{E}\rangle$ za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ (D 14) ne ovisi o tome koje varijable jezik sadrži. Kako se rječnici jezikā $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ razlikuju samo u varijablama, okvir $\langle\mathcal{H},\mathcal{I},\mathcal{E}\rangle$ ujedno je kumulativni poopćeni Henkinov okvir za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Prema stavku 6, apstraktno označavanje $\mathcal{A}'$ za priročne apstrakte jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ zadovoljava definiciju primjerenoga apstraktnoga označavanja (D 24) i stoga je $\mathcal{A}'$ primjereno. Dakle, $\langle\mathcal{M},\mathcal{A}'\rangle$ je, prema definiciji modela (D 25), kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. □

Stavak 8. *Neka je $\langle\mathcal{M},\mathcal{A}\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i neka je $\langle\mathcal{M},\mathcal{A}'\rangle$ kumulativni poopćeni Henkinov model za jezik $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Tada za svaku formulu ϕ jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i svako vrjednovanje varijabla v vrijedi: $\mathcal{M}\models_{v,\mathcal{A}'}\phi$ akko $\mathcal{M}\models_{v,\mathcal{A}}\phi$.*

Dokaz. Prema 2. točki stavka 4, ako su $\beta_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}$ svi parametri u ϕ, a $\alpha_1^{t_1},...,\alpha_n^{t_n}$ varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ koje se ne nalaze u ϕ, imamo sljedeći odnos:

$$\mathcal{M}\models_{v,\mathcal{A}'}\phi \text{ akko } \mathcal{M}\models_{v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}}\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}.$$

No, ako je ϕ formula jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, onda ϕ ne sadrži varijable koje nisu dio jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ pa supstitucija $\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ nema nikakva učinka: $\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ isto je što i ϕ. Stoga, kako po pretpostavci ϕ ne sadrži varijable $\alpha_1^{t_1},...,\alpha_n^{t_n}$, vrjednovanja $v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$ i v slažu u svim varijablama koje su slobodne u $\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\}$, tj. ϕ. Zbog 2. točke stavka 2, imamo tada

$$\mathcal{M}\models_{v\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\},\mathcal{A}}\phi\{\beta_1^{t_1}/\alpha_1^{t_1},...,\beta_n^{t_n}/\alpha_n^{t_n}\} \text{ akko } \mathcal{M}\models_{v,\mathcal{A}}\phi,$$

i stoga vrijedi

$$\mathcal{M}\models_{v,\mathcal{A}'}\phi \text{ akko } \mathcal{M}\models_{v,\mathcal{A}}\phi,$$

što je trebalo dokazati. □

S prethodnim dvama stavcima dokazali smo poučak 1, koji kaže da se svaki kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ može preinačiti u kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ tako da istinitosna vrijednost formula iz $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ ostane nepromijenjena. □

Također vrijedi i poučak prema kojem se svaki model za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ može prikladno preinačiti u model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Dokaz je sličan dokazu za poučak 1 pa ga ovdje preskačemo.

Poučak 2. *Svaki kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ može se preinačiti u kumulativni poopćeni Henkinov model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ tako da istinitosna vrijednost formula iz $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ ostane nepromijenjena.*

3.5 Pouzdanost i nepotpunost

Na koji način kumulativnost, intenzionalnost i razgranatost dovode do razlike između sustava KIRTT i, na primjer, standardne jednostavne teorije tipova, tj. nekumulativne ekstenzionalne jednostavne teorije tipova?

Posljedica intenzionalnosti jednostavno je u tome što, u razlici spram ekstenzionalnih teorija, koekstenzivnost u KIRTT-u ne povlači istovjetnost: dvama *različitim* predmetima iz domene može biti pridružen *isti* skup kao njihov opseg.

Posljedica je razgranatosti to što mnoge formule i oznake – i time supstitucije – koje u jednostavnim teorijama tipova jesu dopuštene, u teoriji KIRTT nisu. Na primjer, u jednostavnoj teoriji tipova, prilagodimo li na očit način našu uporabu riječi 'red' za tipove, priročni apstrakt $\langle \lambda x^0 . \forall x^1 (g^2(x^1) \to x^1(x^0)) \rangle$ ima red 1 i stoga je $g^2(\langle \lambda x^0 . \forall x^1 (g^2(x^1) \to x^1(x^0)) \rangle)$ formula. Kazati da je imati sva svojstva velikoga generala također jedno od svojstava velikoga generala sasvim je u redu. To znači da područje vrijednosti pokoličene varijable u apstraktu $\langle \lambda x^0 . \forall x^1 (g^2(x^1) \to x^1(x^0)) \rangle$ uključuje i predmet označen samim apstraktom. Drugim riječima, jednostavna teorija dopušta impredikativne definicije. Međutim, kao što znamo, to nije slučaj u razgranatim teorijama tipova. U Russellovoj i srodnim teorijama, prisjetimo li se rečenoga kada smo govorili o motivaciji za odabir razgranate radije nego jednostavne teorije, red apstrakta mora nadvisivati red svake vezane varijable i ne smije biti manji od reda slobodnih varijabla i konstanata u pratećoj formuli. Red apstrakta $\langle \lambda x^0 . \forall x^1 (g^2(x^1) \to x^1(x^0)) \rangle$ stoga je 2 i izraz $g^2(\langle \lambda x^0 . \forall x^1 (g^2(x^1) \to x^1(x^0)) \rangle)$ *nije* formula. Predmet označen apstraktom nije među legitimnim vrijednostima pokoličene varijable – Russellova razgranata teorija ne dopušta impredikativne definicije. U našoj tipologiji red apstrakta nadvisuje red *svake* oznake u formuli i red je stoga 3, ali što je rečeno za Russellovu teoriju, vrijedi i za našu. KIRTT je, očekivano, strogo predikativna teorija.

Posljedica je kumulativnosti, s druge strane, to da *jesu* dopuštene mnoge formule i oznake – a time i supstitucije – koje u nekumulativnim teorijama nisu. Tehnički gledano, najvažnija razlika između KIRTT-a i standardnih teorija tipova leži u tome što je KIRTT kumulativna teorija: varijable određenoga reda kao svoje vrijednosti mogu imati i predmete koji su nižega reda od reda varijable. Sugerira to odmah na koji način pravila dokazivanja za KIRTT moraju odstupati od standardnih pravila i, uostalom, već smo gore nagovijestili kako će ta pravila izgledati. Dvije su glavne promjene. Kao prvo, dokazna će pravila dopustiti supstituciju varijable oznakom nižega reda od reda te varijable. Na primjer, iz $\forall x^3 x^3(c^1)$ želimo moći izvesti $\langle \lambda y^1 . y^1(d^0) \rangle (c^1)$, što znači da moramo imati pravila koja dopuštaju supstituciju oznake reda 2 na mjesto varijable reda 3. Kao drugo, ne rezultira svaka supstitucija varijable u formuli formulom i stoga ćemo morati eksplicitno zahtijevati da supstitucija u pravilima dokazivanja bude primjerena. Na primjer, kako $d^0(c^1)$ ne zadovoljava tvorbena pravila, iz $\forall x^3 x^3(c^1)$ ne možemo izvesti $d^0(c^1)$, iako je supstitucija $\{x^3/d^0\}$ potpuno legitimna i ktomu slobodna supstitucija za $x^3(c^1)$. No ta supstitucija, prema definiciji primjerene supstitucije (D 13), nije primjerena za $x^3(c^1)$.

Pravilo za isključenje općega količitelja prikladno za KIRTT stoga bi očito moralo biti nešto na tragu ovoga: iz formule $\forall \mathbf{x}^u \phi$ slijedi rezultat supstitucije oznake τ^t za sve slobodne pojavke varijable $\mathbf{x}^u$ u formuli ϕ, ako je $t \leq u$ i ako je $\{\mathbf{x}^u/\tau^t\}$ supstitucija primjerena za ϕ. Konkretan oblik pravila ovisit će o odabranoj metodi dokazivanja.

Ovdje ćemo se odlučiti za metodu istinitosnoga stabla. Jedan je razlog to što je metoda stabla (barem u iskaznoj logici i logici prvoga reda) vrlo intuitivna i relativno jednostavna metoda dokazivanja. Drugi, važniji razlog, to je što time za usporedbu i kao vodiča imamo na raspolaganju Fittingov dokaz [21, str. 43-65] potpunosti i pouzdanosti metode istinitosnoga stabla za nekumulativnu intenzionalnu jednostavnu teoriju tipova i (nekumulativne) poopćene Henkinove modele.[109] Možda je prikladnom preinakom njegova dokaza moguće dokazati potpunost i pouzdanost metode stabla za kumulativnu intenzionalnu razgranatu teoriju tipova i kumulativne poopćene Henkinove modele?

Istinitosno stablo uobičajena je metoda dokazivanja za iskaznu logiku pa ćemo pretpostaviti kao poznato osnovno nazivlje i pravila za poveznike. Tim pravilima moramo još dodati pravila za količitelje i λ-apstrakciju. No prije toga moramo definirati oznake i formule jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$ koje ćemo nazvati 'kvazizatvorenima'. Kvazizatvorene oznake one su oznake jezika $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$ kojih je supstitucija za varijable dopuštena našim dokaznim pravilima.

[109] Fitting [21, str. 46-47] napominje da se osnovne ideje njegova dokaza potpunosti nalaze već u Takahashijevu [114] i Prawitzovu [77] nekonstruktivnome dokazu eliminacije reza za Gentzenove sustave višega reda.

Definicija 29. (Kvazizatvorene oznake i formule)
Za oznake i formule jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ kažemo da su kvazizatvorene ako i samo ako ne sadrže slobodne varijable jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Kvazizatvorene oznake i formule jezika $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ one su oznake i formule koje bilo uopće ne sadrže slobodne varijable (dakle, zatvorene oznake i iskazi jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$) bilo pak takve da od slobodnih varijabla sadrže samo parametre. Stvar je u tome da, iako je metoda istinitosnoga stabla metoda za dokazivanje *iskazā* jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, njezina pravila ponegdje zahtijevaju supstituciju varijable varijablama koje se ne nalaze u samome jeziku $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ pa stoga formule koje se javljaju u stablu mogu sadržavati parametre (iako ne i druge slobodne varijable).

Mada je samo opći količitelj u osnovnom rječniku jezikā $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ i $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$, korisno je među pravilima za stablo navesti i pravila za opstojni količitelj i njegov nijek. Sljedeća su četiri pravila, dakle, naša pravila za količitelje:

Definicija 30. ($\forall, \neg\exists$)

$$\forall : \quad \frac{\forall \alpha^u \phi}{\phi\{\alpha^u/\tau^t\}}$$

$$\neg\exists : \quad \frac{\neg\exists \alpha^u \phi}{\neg\phi\{\alpha^u/\tau^t\}}$$

τ^t je kvazizatvorena oznaka, $t \leq u$ i $\{\alpha^u/\tau^t\}$ primjerena za ϕ.

Definicija 31. ($\exists, \neg\forall$)

$$\exists : \quad \frac{\exists \alpha^u \phi}{\phi\{\alpha^u/p^u\}}$$

$$\neg\forall : \quad \frac{\neg\forall \alpha^u \phi}{\neg\phi\{\alpha^u/p^u\}}$$

p^u je parametar koji se prethodno ne javlja na putu.

Kratko pojašnjenje ovdje je na mjestu. Formule oblika $\forall\alpha^u\phi$, prema prethodno opisanoj semantici, kažu nam da je formula ϕ zadovoljena *svakim* predmetom iz kumulativne domene $Int(u)$, tj. svakim predmetom koji je reda $\leq u$. Zbog toga varijablu α^u možemo u ϕ supstituirati bilo kojom kvazizatvorenom oznakom bilo kojega reda $\leq u$. Međutim, kako nemamo jamstvo da svaka takva supstitucija rezultira formulom, pravilima izričito tražimo da je ta supstitucija primjerena za ϕ.

S druge strane, formule oblika $\neg\forall\alpha^u\phi$ kažu da barem jedan predmet iz kumulativne domene $Int(u)$ ne zadovoljava formulu ϕ. Problem je, međutim, što ne znamo u kojoj se Henkinovoj domeni $\mathcal{H}(0), ..., \mathcal{H}(u)$ taj predmet nalazi. Zato ne možemo α^u jednostavno supstituirati nekom konstantom koja se prethodno nije pojavila na putu: konstante i zatvoreni apstrakti reda t, prema definiciji funkcija $\mathcal{I}$ i $\mathcal{A}$, označavaju predmete iz Henkinove domene $\mathcal{H}(t)$, a nemamo jamstvo da je predmet koji ne zadovoljava ϕ upravo u toj poddomeni od $Int(u)$. Varijable (uključujući parametre) u našoj se kumulativnoj teoriji u tom pogledu semantički ponašaju sasvim drugačije od konstanata i apstrakata: varijabli reda t vrjednovanjem se može pridružiti bilo koji predmet reda $\leq t$. Stoga pravilom tražimo da se varijabla α^u supstituira nekim parametrom koji je istoga reda kao i ona.[110] *To* je razlog za definiranje pravila pomoću *kvazi*zatvorenih oznaka. Kako je p^u istoga reda kao i α^u i kako ktomu parametri po definiciji ne mogu biti vezani djelateljima, $\{\alpha^u/p^u\}$ je uvijek primjerena supstitucija pa to ne moramo posebno zahtijevati.

Preostalo nam je sada dati još pravila za λ-apstrakciju.

Definicija 32. (λ)

$$\lambda : \quad \frac{\langle\lambda\alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)}{\phi\{\alpha^u/\tau^t\}}$$

$$\neg\lambda : \quad \frac{\neg\langle\lambda\alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)}{\neg\phi\{\alpha^u/\tau^t\}}$$

τ^t je kvazizatvorena oznaka, $t \leq u$ i $\{\alpha^u/\tau^t\}$ primjerena za ϕ.

[110]Za sve praktične svrhe, u nekumulativnoj se teoriji varijabla može supstituirati običnom konstantom istoga reda kao i ona, bez uvođenja parametara, pod uvjetom da se ta konstanta ne javlja ranije na putu (vidi npr. Kovač [53, str. 89]). No, kako smo objasnili, u našoj kumulativnoj teoriji to ne možemo učiniti.

Red oznake τ^t mora biti jednak ili manji redu varijable α^u da bi izraz $\langle \lambda \alpha^u.\phi \rangle(\tau^t)$ uopće bio formula. Ostali uvjeti ispod pravilā iz istoga su razloga kao i uvjeti ispod pravilā za $\forall$.

Prije prijelaza na pitanje jesu li pravila stabla za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ pouzdana, dajemo nekoliko definicija analognih definicijama za istinitosno stablo iskazne logike i logike prvoga reda.

Definicija 33. (Zatvoreno stablo)

Put je u stablu zatvoren akko sadrži i ϕ i $\neg\phi$, za neku kvazizatvorenu formulu ϕ. Stablo je zatvoreno akko je svaki put u stablu zatvoren.

Definicija 34. (Dokaz iskaza, izvod)

Dokaz iskaza ϕ zatvoreno je stablo koje započinje iskazom $\neg\phi$.

Izvod iskaza ϕ iz skupa iskaza Γ zatvoreno je stablo koje započinje iskazom $\neg\phi$ i za koje dopuštamo dodatno pravilo da se u svakome koraku na kraju svakoga puta smije dodati bilo koji iskaz $\psi \in \Gamma$.

Ako postoji dokaz iskaza ϕ, pisat ćemo $\vdash \phi$; ako postoji izvod iskaza ϕ iz Γ, pisat ćemo $\Gamma \vdash \phi$.

Definicija 35. (Zadovoljivo stablo)

Put je u stablu zadovoljiv akko je skup svih formula koje se javljaju na njemu zadovoljiv u nekom kumulativnom poopćenom Henkinovu modelu za jezik $\mathcal{L}^+_{\mathsf{KIRTT}}$. Stablo je zadovoljivo akko je barem jedan put u stablu zadovoljiv.

S gornjim definicijama u rukama, konačno možemo krenuti s dokazivanjem da je metoda stabla pouzdan dokazni postupak za KIRTT. Najvažniji dio toga dokaza čini sljedeći stavak:

Stavak 9. *Rezultat je primjene pravila za stablo na zadovoljivo stablo uvijek zadovoljivo stablo.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{P}$ neki zadovoljiv put stabla. Iz toga definicijom zadovoljiva puta slijedi da je svaka formula na $\mathbf{P}$ istinita za neko vrjednovanje v u nekom modelu $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A} \rangle$ za

$\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Primijenimo na $\mathbf{P}$ pravilo i proširimo put u $\mathbf{P}'$. Treba dokazati da je $\mathbf{P}'$ također zadovoljiv put. Prema definiciji pravila, svaka je formula na $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ kvazizatvorena. Dokaz stavka ima onoliko koraka koliko ima pravila za stablo, ali svaki je korak relativno jednostavan pa ćemo se zadovoljiti time da dokažemo tvrdnju za pravilo za $\forall$.[111]

($\forall$) Neka se na zadovoljivu putu $\mathbf{P}$ javlja formula $\forall\alpha^u\phi$ i neka je primijenjeno pravilo tako da je put $\mathbf{P}$ proširen u $\mathbf{P}'$ formulom $\phi\{\alpha^u/\tau^t\}$. Prema pretpostavci, sve su formule ψ na $\mathbf{P}$ istinite za v u modelu $\langle\mathcal{M},\mathcal{A}\rangle$ za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$ pa stoga za svaku ψ vrijedi $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \psi$. Posebno, $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \forall\alpha^u\phi$. Iz toga slijedi da za za svako w koje je α^u-inačica vrjednovanja v vrijedi da $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} \phi$. Uzmimo sada vrjednovanje $v^{\{\alpha^u/\tau^t\}}$. To je vrjednovanje α^u-inačica vrjednovanja v pa vrijedi $\mathcal{M} \models_{v^{\{\alpha^u/\tau^t\}},\mathcal{A}} \phi$. Ali, zbog stavka 3. 2, $\mathcal{M} \models_{v^{\{\alpha^u/\tau^t\}},\mathcal{A}} \phi$ akko $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \phi\{\alpha^u/\tau^t\}$. Dakle, postoji vrjednovanje, naime v, za koje je svaka formula iz $\mathbf{P}'$ istinita. $\mathbf{P}'$ je stoga zadovoljiv put. $\square$

Posljednji mali korak koji nam je preostao do dokaza pouzdanosti jest pokazati da nijedno zatvoreno stablo nije zadovoljivo.

Lema 2. *Nijedno zatvoreno stablo nije zadovoljivo.*

Dokaz. Iz definicija 21, 33 i 35. Zatvoreno stablo u svakom putu sadrži i neku formulu i njezin nijek, dok u zadovoljivu stablu u barem jednome putu skup svih formula mora biti zadovoljiv. $\square$

Konačno sada imamo na raspolaganju sve što nam je potrebno za dokazati poučak o pouzdanosti metode stabla za KIRTT:

Poučak 3. *Za svaki iskaz ϕ i skup iskaza Γ jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$, vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. Ako za iskaz ϕ postoji dokaz, ϕ je valjan.

2. Ako postoji izvod iskaza ϕ iz skupa iskaza Γ, ϕ je semantička posljedica skupa Γ.

[111]Dokazi za pravila za $\exists$ i λ mogu se naći u Fitting [21, str. 44-46]. Dokaz za $\exists$ za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ vrijedi bez izmjene (uočimo da pravilo uključuje supstituciju varijable parametrom istoga reda), a u slučaju pravila za λ treba samo uzeti u obzir da supstitucija mora biti primjerena za ϕ.

Dokaz. Dokažimo 1. točku, posve analogno se dokazuje i 2.[112] Neka za iskaz ϕ postoji dokaz i za *reductio* pretpostavimo da ϕ nije valjan. Iz definicija valjanosti i istinitosti (D 26 i 21) onda slijedi da postoji model za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ u kojem je $\neg\phi$ istinito pa je $\{\neg\phi\}$ zadovoljiv u nekom modelu za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$. Zbog poučka 1, $\{\neg\phi\}$ je zadovoljiv i u nekom modelu za $\mathcal{L}^{+}_{\mathsf{KIRTT}}$. Stablo S, koje se sastoji samo od $\neg\phi$, stoga je zadovoljivo stablo (D 35). Prema stavku 9, primjenom pravila za stablo na S dobivamo uvijek zadovoljivo stablo. No, prema pretpostavci, za ϕ postoji dokaz, a dokaz je zatvoreno stablo koje počinje s $\neg\phi$ (D 34). Postoji, prema tome, stablo koje je zatvoreno i zadovoljivo što protuslovi lemi 2. Dakle, ako za iskaz ϕ postoji dokaz, ϕ je valjan. $\square$

Dokazali smo time da je metoda istinitosnoga stabla pouzdana za KIRTT: za svaki iskaz ϕ, ako $\vdash \phi$, onda $\models \phi$. No, vrijedi li i obrnuto: za svaki iskaz ϕ, ako $\models \phi$, onda $\vdash \phi$? Nažalost, ne. Metoda stabla za KIRTT nije potpuna i to je, zapravo, vrlo lako vidjeti.

Uzmimo neki iskaz oblika $\langle\lambda\alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)$, takav da $\phi\{\alpha^u/\tau^t\}$ nije formula. Konkretno, uzmimo $\langle\lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$. Taj je iskaz nezadovoljiv. Naime, da bi bio istinit, prema definiciji 21, predmet označen konstantom d^2 morao bi biti u ekstenziji predmeta označenoga apstraktom $\langle\lambda x^3.x^3(c^2)\rangle$, tj.

$$(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(d^2) \in \mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda x^3.x^3(c^2)\rangle)).$$

Međutim, prema definiciji primjerenoga apstraktnoga označavanja (D 24), predmet označen apstraktom, tj. $(v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle\lambda x^3.x^3(c^2)\rangle)$, u svojoj ekstenziji ima samo one predmete koji zadovoljavaju formulu $x^3(c^2)$, odnosno njegov je opseg:

$$\{w(x^3) \mid \mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} x^3(c^2), \textit{za } w \textit{ koje je } x^3\textit{-inačica vrjednovanja } v\}.$$

No za koje je x^3-inačice vrjednovanja v formula $x^3(c^2)$ istinita? Da bi ta formula bila istinita, $\mathcal{M} \models_{w,\mathcal{A}} x^3(c^2)$, predmet označen konstantom c^2 mora biti u ekstenziji predmeta koji w pridružuje varijabli x^3, tj. mora biti slučaj sljedeće:

$$(w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(c^2) \in \mathcal{E}((w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(x^3)).$$

[112] Nakon dokaza stavka 9, ovaj završni dio dokaza pouzdanosti metode stabla ne razlikuje se puno od dokaza za druge sustave. Usp. Fitting [21, str. 46].

No $\mathcal{I}(c^2)$, prema definiciji okvira (D 14), u Henkinovoj je domeni $\mathcal{H}(2)$, a predmeti iz $\mathcal{H}(2)$ mogu biti samo u domeni predmetā iz onih domena koje su reda ≥ 3. Drugim riječima, ekstenzija $\mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle \lambda x^3.x^3(c^2)\rangle))$ sastoji se samo od predmeta koji su članovi domene $\mathcal{H}(3)$, što znači da $(w * \mathcal{I} * \mathcal{A})(d^2)$ niti za jedno vrjednovanje u bilo kojem modelu $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}\rangle$ za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ nije član skupa $\mathcal{E}((v * \mathcal{I} * \mathcal{A})(\langle \lambda x^3.x^3(c^2)\rangle))$. Dakle, kako smo rekli, $\langle \lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$ je nezadovoljiv, što pak znači da je njegov nijek, $\neg\langle \lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$, valjan. I tu sada imamo problem.

Ako su naša pravila potpuna, morali bismo pomoću njih, u stablu koje bi započelo iskazom $\neg\neg\langle \lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$, izvesti neko protuslovlje. No, prema pravilima koja imamo, ne možemo se maknuti dalje od drugoga redka i formule $\langle \lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$. Naime, $\{x^3/d^2\}$ nije primjerena supstitucija za $x^3(c^2)$. Dakle, metoda stabla koju smo opisali nije potpuna za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$.

Na prvi se pogled može učiniti da problem nije velik i da se lako može riješiti jednostavnom dopunom pravila za stablo koja smo dali. Ako je svaki iskaz oblika $\langle \lambda \alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)$, takav da $\phi\{\alpha^u/\tau^t\}$ nije formula, nezadovoljiv, možda bismo mogli samo dodati pravilo da je svaki put u stablu koji sadrži takav iskaz zatvoren – slično, na primjer, kao što bismo mogli zatvoriti put koji sadrži $\tau \neq \tau$. Rješenje ipak nije tako jednostavno. Pravila za stablo formulirali smo u terminima kvazizatvorenih formula, ne iskaza. No, kvazizatvorene formule oblika $\langle \lambda \alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)$, čak i ako $\phi\{\alpha^u/\tau^t\}$ nije formula, *mogu* biti zadovoljive. Zamijenimo u iskazu iz našega primjera konstante parametrima i pogledajmo kvazizatvorenu formulu $\langle \lambda x^3.x^3(p^2)\rangle(q^2)$. Kako varijable – pa onda i parametri – kao vrijednosti mogu imati i predmete reda nižega od njihova, problema nema. Samo uzmimo neko prikladno vrjednovanje v, takvo da $v(p^2) = O^1$ i $v(q^2) = O^2$, i lako je vidjeti da je formula zadovoljiva.

Da stvar bude gora, problem sličan onomu opisanomu iznad, no na još elementarnijoj razini, predstavljaju pokoličene formule poput npr. $\forall x^3 x^3(c^2)$, tj. formule u kojima se varijabla vezana općim količiteljem nalazi na mjestu priroka. Lako je vidjeti da navedena formula, tvrdeći da predmet označen konstantom c^2 (dakle, predmet iz Henkinove domene $\mathcal{H}(2)$) oprimjeruje *sve* predmete iz kumulativne domene $Int(3)$, nije zadovoljiva. Njezin je nijek, $\neg\forall x^3 x^3(c^2)$, stoga valjana formula, ali to također ne možemo dokazati pomoću danih pravila.

Glavni problem, kako je bilo za očekivati, leži u kumulativnosti, ali nije očito što bi bilo najjednostavnije rješenje. Posebice ne ako nam je cilj zadržati formalizam što je moguće bliže njegovoj intendiranoj neformalnoj semantici kao formalni opis punokrvnoga realističkoga shvaćanja pojmova i pritom također zadržati ono što mi se čini kao plauzibilno stajalište da je bitno obilježje pojmova njihov "sadržaj" ili "smisao", a da taj sadržaj ili smisao u nekome jakome smislu (ontologijski) ovisi o sadržaju ili smislu drugih pojmova.

S jedne strane, kumulativnost smo sintaktički ugradili u formativna pravila i time dobili problematične formule oblika $\langle\lambda\alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)$ i $\forall\alpha^u\phi$. Apstrakt oblika $\langle\lambda\alpha^u.\phi\rangle$ neformalno smo razumjeli kao ime pojma "biti predmet iz kumulativne domene $Int(u)$ koji zadovoljava ϕ" i intuitivno se činilo da bi formule oblika $\langle\lambda\alpha^u.\phi\rangle(\tau^t)$ trebale biti gramatički dopuštene u svakom slučaju kada imamo $t \leq u$. Slično, formule oblika $\forall\alpha^u\phi$ neformalno smo shvatili kao tvrdnje da svi predmeti reda manjega ili jednakoga redu u zadovoljavaju formulu ϕ i činilo nam se da bi takve formule trebale biti gramatički dopuštene neovisno o obliku formule ϕ, tj. neovisno o položaju varijable α^u u ϕ. Što bi bilo plauzibilno ograničenje gramatički dopuštenih izraza? Neistinitost – čak niti nezadovoljivost – nije isto što i besmislenost.

S druge strane, kumulativnost smo semantički izrazili dopuštanjem da varijable nekoga reda t kao vrijednosti mogu imati predmete iz svih domena do i uključujući red t. To kao posljedicu ima da su formule poput $\langle\lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$ i $\forall x^3 x^3(c^2)$ nezadovoljive. Ograničiti nekako moguće vrijednosti varijabla, a ne izgubiti njihov kumulativni karakter, možda jest moguće, ali ne izgleda *prima facie* niti kao jednostavno niti kao (metafizički) plauzibilno rješenje.

Rekavši to, evo što bi moglo biti jedno moguće rješenje, koje uključuje i sintaktičku i semantičku intervenciju u KIRTT. Kao prvo, preinačimo tvorbena pravila (D 4) tako da eksplicitno zahtijevamo da je $\langle\lambda\mathbf{x}^t.\phi\rangle(\tau^u)$ formula *samo* ako je $\{\mathbf{x}^t/\tau^u\}$ primjerena supstitucija za ϕ. Time su izrazi poput $\langle\lambda x^3.x^3(c^2)\rangle(d^2)$ isključeni iz skupa formula i prestaju biti problem. Kao drugo, promijenimo definiciju istinitosti za pokoličene formule (D 21) na sljedeći način: $\mathcal{M} \models_{v,\mathcal{A}} \forall\mathbf{x}^t.\phi$ akko $\mathcal{M} \models_{v\{\mathbf{x}^t/\tau^u\},\mathcal{A}} \phi$, za svaku zatvorenu oznaku τ^u takvu da je $u \leq t$ i $\{\mathbf{x}^t/\tau^u\}$ primjerena za ϕ. Prema novoj definiciji, formula $\forall\mathbf{x}^t.\phi$ istinita je akko su istinite sve *formule* $\phi\{\mathbf{x}^t/\tau^u\}$, takve da je τ^u zatvorena oznaka. Formule poput $\forall x^3 x^3(c^2)$ prestaju time biti nezadovoljive. Međutim, čak i ako bi se na taj način doista mogla dokazati potpunost dokaznih pravila, problem je što predloženo rješenje uključuje svojevrsno *supstitucijsko* tumačenje količiteljā i time se čini neprikladnim za sustav kojemu je izričita namjera biti formalnim opisom realistične teorije intenzionalnih predmeta. Takav bi sustav bio, prisjetimo li se još jednom Gödelova razlikovanja dviju koncepcija pojma, bliži konstruktivističkomu ili nominalističkomu shvaćanju pojmova.

Gledano s vedrije strane, pokazati da je metoda istinitosnoga stabla pouzdana za $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$

ipak je kakav-takav uspjeh. Također, uspjeli smo pomoću našega formalnoga jezika i prateće semantike, bez previše žrtvovanja intuicija, preciznije opisati pomalo nejasne metafizičke slutnje. Možda mogućnost formalizacije nije nužan uvjet smislenosti filozofijskih pogleda, ali uvijek je dobar indikator.

4 ZAKLJUČAK

Pojam stavačne funkcije središnji je pojam Russellove teorije tipova i u prvome nacrtu teorije u *The Principles of Mathematics* iz 1903. i u njegovoj zreloj formulaciji razgranate teorije tipova u prvome izdanju *Principia Mathematica* iz 1910. Do danas je ostalo prijeporno što su za Russella stavačne funkcije u razgranatoj teoriji – izvanjezični apstraktni entiteti poput atributā ili pojmova ili pak samo jezični simboli poput otvorenih formula. Russell u *Principia* ne daje izričit odgovor. Prvi je dio rada pokušaj odgovora na to pitanje.

Istražujući povijest i filozofijski kontekst razvoja Russellove logike, u radu se argumentira, uglavnom slijedeći eliminativističku interpretaciju Gregoryja Landinija, da razgranata teorija tipova nije nagli prekid s prethodnim Russellovim pokušajima rješavanja problema paradoksā, već da, naprotiv, razgranatu teoriju tipova u *Principia* treba razumjeti upravo kao nastavak njegove ranije supstitucijske teorije, koja je sama pak nastavak i razvoj teorije tipova iz *Principles*. Smjestivši Russellovu razgranatu teoriju u kontekst njezina nastanka i Russellovih razmatranja koja su ga vodila od ranoga nacrta teorije tipova do logike *Principia*, kao i u kontekst pozadinskih filozofijskih obrazloženja u izlaganju same razgranate teorije, zaključuje se da je tumačenje prema kojemu Russell sam stavačne funkcije već u vrijeme *Principia* razumije tek kao izraze – preciznije, kao tzv. nepotpune simbole, koji nemaju značenje sami po sebi – daleko uvjerljivije.

U Russellovoj koncepciji logike središnje mjesto pripada razumijevanju logike kao univerzalne znanosti, koja nije ograničena na neko posebno područje entitetā, već koja se odnosi na sve što postoji i što uopće može postojati. Posljedica je takva razumijevanja logike Russellovo čvrsto prihvaćanje tzv. nauka o neograničenoj varijabli, formuliranoga još u *Principles*, prema kojemu logika mora imati samo jednu vrstu istinskih varijabla, tj. samo individualne ili entitetske varijable, vrijednost kojih može biti sve što uopće jest. U *Principles* izraz 'pojedinačnost' Russell rabi kao istoznačnicu izrazu 'entitet', dakle kao izraz za sve što uopće jest ili što ima bitak: sve što jest, jedno je. Ono što u "Dodatku B", u kojemu iznosi prvi grubi nacrt teorije tipova, naziva 'individualna varijabla', mišljeno je kao entitetska varijabla i njezine su moguće vrijednosti i oni predmeti koje ondje naziva 'stvarima' i oni koje naziva 'pojmovima'. Teorija tipova nastala je time što su paradoksi Russella natjerali skupove (tj. "razrede kao mnoštva") isključiti iz područja mogućih vrijednosti individualnih varijabla. Kako skupovi, činilo se, i sami u nekom smislu *jesu*, uvođenje posebnih varijabla za skupove kršilo je zahtjev za neograničenim varijablama logike i to je bio, uz paradoks stavaka, glavni razlog Russellova nezadovoljstva teorijom tipova.

Međutim, otkriće mehanizma eliminacije označavajućih fraza, opisanoga u "On Denoting", omogućilo je Russellu potpuno eliminirati skupove iz ontologije i izraze koji naizgled označavaju skupove shvatiti samo kao nepotpune simbole, bez ikakve ontologijske težine. Prividni entiteti viših tipova od tipa pojedinačnosti – skupovi i stavačne funkcije kao "svojstva" – uklonjeni su iz pozadinske ontologije i nauk o neograničenoj varijabli time je izgledao sačuvan. Zamjenom notacije tipske teorije notacijom sa samo jednom vrstom varijabla, tj. samo s individualnim ili entitetskim varijablama, uz uvođenje pojma ontologijske supstitucije, te pokazivanjem na koji se način izrazi u staroj notaciji mogu prevesti unutar notacije samo s entitetskim varijablama, razvio je Russell svoju supstitucijsku teoriju. Otkriće da se u teoriji mogu izvesti paradoksi stavaka, natjeralo je Russella povući iz objavljivanja članak "On the Substitutional Theory of Classes and Relations" i supstitucijska je teorija ostala, nažalost, relativno slabo istražena. No Russell ju nije jednostavno napustio i *vratio* se teoriji tipova, kako se ponekad pojednostavljeno opisuje razdoblje između dvije teorije tipova. Supstitucijska je teorija bila ništa drugo do teorija tipova u ontologijski preciznijoj notaciji. Zbog tehničke pogodnosti, Russell kasnije vraća notaciju s različitim vrstama varijabla, ali podrazumijevajući ontologiju supstitucijske teorije i mogućnost kontekstualne eliminacije varijabla viših tipova i izrazā za stavačne funkcije pomoću "službene" notacije supstitucijske teorije. Paradoksi stavaka, zajedno s uvjerenjem da se ti paradoksi mogu izbjeći samo nekom vrstom tipskoga razlikovanja stavaka, naveli su Russella i na opće stavke primijeniti lijek koji je već uspješno primijenio na skupove i stavačne funkcije: uvesti tipsku hijerarhiju, ali ujedno pokazati da su izrazi za stavke koji nisu elementarni (tj. za stavke viših redova, kojih izrazi sadrže količitelje) samo nepotpuni simboli i ukloniti time opće stavke iz ontologije. Tako je nastala razgranata teorija tipova u "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" i ondje Russell ukratko, ali izričito, povezuje razgranatu teoriju tipova sa supstitucijskom teorijom.

U *Principia*, na sličan način, uklanja Russell i elementarne stavke i stavci su sada samo nepotpuni simboli. Plauzibilno je tvrditi da je razlog za to upravo isti onaj koji ga je nagnao eliminirati opće stavke, a još prije toga i stavačne funkcije i skupove: pokušaj čuvanja logicističkoga nauka o neograničenoj varijabli. Za pojedinačnost Russell u *Principia* kaže da je bilo što što nije niti stavak niti stavačna funkcija, ali također i da je pojedinačnost ono što zasebno postoji, što sugerira da nije napustio shvaćanje individualnih varijabla kao neograničenih, entitetskih varijabla. Uz eliminaciju stavaka, nema niti filozofijskih razloga niti tekstualne potkrjepe za tvrdnju da je stavačne funkcije vratio kao punokrvne entitete. Dakle, čini se opravdanim zaključiti da su stavačne funkcije u *Principia Mathematica* također samo izrazi i da time razgranata hijerarhija tipova nije ontologijska hijerarhija.

Drugi dio rada znatno se razlikuje od prvoga dijela i uključuje puno više uporabu formalno-logičkih nego povijesno-filozofijskih metoda. Iako za Russella, kako se tvrdilo u prvome dijelu, razgranata hijerarhija tipova nije ontologijska hijerarhija, razgranata se teorija tipova *može* interpretirati kao teorija intenzionalnih entiteta. Ne traži li se u razgranatoj teoriji tipova nekakav univerzalan logički jezik ili univerzalnu znanost, već samo prikladno formalno oruđe i ako se, u skladu s tim, nema predrasuda prema uporabi različitih vrsta varijabla za različite vrste entitetā, razgranata se teorija čini obećavajućim okvirom za formalizaciju određenih realističkih metafizičkih intuicija o naravi intenzionalnih entiteta poput atributā, pojmova, možda čak i platonovskih ideja.

U drugome se dijelu rada stoga pokušalo istražiti mogućnost jedne takve realističke interpretacije razgranate teorije tipova i opisati okvir jedne moguće formalne teorije pojma, koju se prikladno nazvalo ‘KIRTT’, što je pokrata za ‘kumulativna intenzionalna razgranata teorija tipova’. Kao semantiku za KIRTT, eksplicitno intenzionalnu teoriju, rabilo se intenzionalno poopćenje tzv. općih ili Henkinovih modela, što je omogućilo u formalnom sustavu oponašati određene bitno intenzionalne značajke entitetā kao što su pojmovi ili svojstva. “Značenje” oznaka jezika $\mathcal{L}_{\mathsf{KIRTT}}$ proizvoljni su predmeti određenih tipsko strukturiranih domena, kojima je posebnom funkcijom pridružen neki skup predmetā kao njihov opseg. Koekstenzivnost predmetā u sustavu KIRTT ne povlači njihovu istovjetnost, što je definicijska značajka intenzionalnih logika.

KIRTT je prema načinu tipizacije razgranata teorija tipova – i time strogo predikativna teorija. Razlog za odabir razgranate, radije nego jednostavne teorije tipova, leži u intendiranoj neformalnoj semantici, prema kojoj se priročni apstrakti razumiju kao imena pojmova, i u pozadinskoj metafizici koju se pokušalo formalizirati, prema kojoj je bitno obilježje pojma njegov “smisao” ili “intenzionalni sadržaj”. Intenzionalni sadržaj pojma u toj je metafizičkoj slici shvaćen kao ontologijski ovisan o intenzionalnom sadržaju pojmova koji “definiraju” ili “tvore” dani pojam. Oznake reda ω sugerirane su kao formalne reprezentacije platonovskih ideja.

Sustav KIRTT, u razlici spram standardnih teorija tipova, kumulativna je teorija, razlog za što je pokušaj da se u formalnom sustavu modelira metafizička (ili jezična) intuicija da se isti pojmovi ili svojstva, barem ponekad, mogu smisleno pripisivati predmetima koji se nalaze na različitim položajima u ontologijskoj hijerarhiji. Kumulativnost je, međutim, dovela do određenih neprivlačnih značajki sustava KIRTT, prije svega do očite nepotpunosti metode istinitosnoga stabla za kumulativne poopćene Henkinove modele. S druge strane, dokazana je pouzdanost, što barem sugerira filozofijsku smislenost, ako već ne plauzibilnost, metafizičkih pogleda koje se pokušalo formalno opisati.

Literatura

[1] Anderson, C. A. (1986), "Some Difficulties Concerning Russellian Intensional Logic", *Noûs*, 20 (1), 35–43.

[2] Anderson, C. A. (1989), "Russellian Intensional Logic". U: *Themes from Kaplan*, ur. J. Almog, J. Perry i H. Wettstein, Oxford: Oxford University Press, 67–103.

[3] Andrews, P. B. (1972), "General Models and Extensionality", *The Journal of Symbolic Logic*, 37 (2), 395–397.

[4] Candlish, S. (1996), "The Unity of the Proposition and Russell's Theories of Judgement". U: *Bertrand Russell and The Origins of Analytical Philosophy*, ur. R. Monk i A. Palmer, Bristol: Thoemmes Press, 103–135.

[5] Cantini, A. (2004), "On a Russellian Paradox about Propositions and Truth". U: *One Hundred Years of Russell's Paradox*, ur. G. Link, Berlin – New York: Walter de Gruyter, 259–284.

[6] Cantini, A. (2009), "Paradoxes, Self-Reference and Truth in the 20th Century". U: *Handbook of the History of Logic, Volume 5. Logic from Russell to Church*, ur. D. M. Gabbay i J. Woods, Amsterdam: Elsevier, 875–1013.

[7] Carnap, R. (1929), *Abriss der Logistik, mit besondere Berücksichtigung der Relationstheorie und ihre Anwendungen*, Wien: Springer.

[8] Carnap, R. (1931), "Die logizistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis*, 2 (1), 91–105.

[9] Carnap, R. (1987) [hrvatski prijevod [8]], "Logicističko zasnivanje matematike". U: *Novija filozofija matematike*, ur. Z. Šikić, Beograd: Nolit, 35–48.

[10] Cartwright, R. L. (2005), "Remarks on Propositional Functions", *Mind*, 114 (456), 915–927.

[11] Chihara, C. (1973), *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, Ithaca: Cornell University Press.

[12] Church, A. (1940), “A Formulation of the Simple Theory of Types”, *The Journal of Symbolic Logic*, 5 (2), 56–68.

[13] Church, A. (1956), *Introduction to Mathematical Logic*, 1. svezak, Princeton: Princeton University Press.

[14] Church, A. (1976), “Comparison of Russell’s Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski”, *The Journal of Symbolic Logic*, 41 (4), 747–760.

[15] Cocchiarella, N. (1980), “The Development of the Theory of Logical Types and the Notion of Logical Subject in Russell’s Early Philosophy”, *Synthese*, 45, 71–115.

[16] Cocchiarella, N. (1985), “Frege’s Double Correlation Thesis and Quine’s Set Theories NF and ML”, *Journal of Philosophical Logic*, 14, 1–39.

[17] Cocchiarella, N. B. (1989), “Russell’s Theory of Logical Types and the Atomistic Hierarchy of Sentences”. U: *Rereading Russell: Essays on Bertrand Russell’s Metaphysics and Epistemology*, ur. C. W. Savage i C. A. Anderson, Minneapolis: University of Minnesota Press, 41–62.

[18] Copi, I. (1971), *The Theory of Logical Types*, London: Routledge & Kegan Paul.

[19] Devidé, V. (1991), *Matematička čitanka*, Zagreb: Školska knjiga.

[20] Feferman, S.. (2005), “Predicativity”. U: *Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, ur. S. Shapiro, Oxford: Oxford University Press, 590–624.

[21] Fitting, M. (2002), *Types, Tableaus, and Gödel’s God*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publisher.

[22] Fitting, M. (2004), “First-Order Intensional Logic”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 127, 171–193.

[23] Fitting, M. (2006), “FOIL Axiomatized”, *Studia Logica*, 84 (1), 1–22.

[24] Forster, T. E. (1995), *Set Theory with Universal Set. Exploring an Untyped Universe* (2. izdanje), Oxford: Clarendon Press.

[25] Frege, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner.

[26] Frege, G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena: Verlag Hermann Pohle.

[27] Frege, G. (1980), *Philosophical and Mathematical Correspondence*, ur. G. Gabriel, Oxford: Blackwell.

[28] Frege, G. (1995), *Osnove aritmetike: i drugi spisi*, Zagreb: KruZak.

[29] Fuhrman, A. (2001), "Russell's Early Type Theory and the Paradox of Propositions", *Principia*, 5 (1-2), 19–41.

[30] Garciadiego, A. R. (1992), *Bertrand Russell and the Origins of the Set-Theoretic 'Paradoxes'*, Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag.

[31] Geach, P. (1972), *Logic Matters*, Oxford: Blackwell.

[32] Gödel, K. (1990) [1944], "Russell's Mathematical Logic". U: Gödel, K. (1990), *Collected Works, Vol. II: Publications 1938-1974*, ur. S. Feferman et al., New York – Oxford: Oxford University Press, 119–141.

[33] Godwyn, M. i Irvine, A. D. (2003), "Bertrand Russell's Logicism". U: *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, ur. N. Griffin, New York: Cambridge University Press, 171–201.

[34] Goldfarb, W. (1989), "Russell's Reasons for Ramification". U: *Rereading Russell: Essays on Bertrand Russell's Metaphysics and Epistemology*, ur. C. W. Savage i C. A. Anderson, Minneapolis: University of Minnesota Press, 24–40.

[35] Grattan-Guinness, I. (1974), "The Russell Archives: Some New Light on Russell's Logicism", *Annals of Science*, 31 (5), 387–406.

[36] Grattan-Guinness, I. (1977), *Dear Russell, Dear Jourdain: A Commentary on Russell's Logic, Based on His Correspondence With Philip Jourdain*, London: Duckworth.

[37] Grattan-Guinness, I. (2003), "Mathematics in and behind Russell's Logicism, and Its Reception". U: *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, ur. N. Griffin, New York: Cambridge University Press, 51–83.

[38] Griffin, N. (2004), "The Prehistory of Russell's Paradox". U: *One Hundred Years of Russell's Paradox*, ur. G. Link, Berlin – New York: Walter de Gruyter, 349–371.

[39] Halimi, B. (2011), “The Versatility of Universality in *Principia Mathematica*”, *History and Philosophy of Logic*, 32, 241–264.

[40] Heijenoort, J. van (1967a) (ur.) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

[41] Heijenoort, J. van (1967b), “Logic as Calculus and Logic as Language”, *Synthese*, 17 (3), 324–330.

[42] Henkin, L. (1950), “Completeness in the Theory of Types”, *The Journal of Symbolic Logic*, 15 (2), 81–91.

[43] Hobson, E. (1905), “On the General Theory of Transfinite Numbers and Order Types”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 2-3 (1), 170–188.

[44] Hobson, E. (1906), “On the Arithmetic Continuum”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 4 (1), 21–28.

[45] Kamareddine, F. i Laan, T. (1995), “A Reflection on Russell’s Ramified Types and Kripke’s Hierarchy of Truths”, Technical Report 18, Computing Science Reports, Eindhoven University of Technology.

[46] Kamareddine, F., Laan, T. i Constable, R. (2012), “Russell’s Orders in Kripke’s Theory of Truth and Computational Type Theory”. U: *Handbook of the History of Logic*, sv. 6, ur. D. M. Gabbay, A. Kanamori i J. Woods, Amsterdam: Elsevier, 801-845.

[47] Klement, K. C. (2001), “Russell’s Paradox in Appendix B of the *Principles of Mathematics*: Was Frege’s Response Adequate?”, *History and Philosophy of Logic*, 22, 13–28.

[48] Klement, K. C. (2010a), “The Functions of Russell’s No Class Theory”, *The Review of Symbolic Logic*, 3 (4), 633–664.

[49] Klement, K. C. (2010b), “Russell, His Paradoxes, and Cantor’s Theorem”, *Philosophy Compass*, 5 (1), 16–41.

[50] Korhonen, A. (2009), “Russell’s Early Metaphysics of Propositions”, *Prolegomena*, 8 (2), 159–192.

[51] Kovač, S. (2005), *Logičko-filozofijski ogledi*, Zagreb: Hrvatsko filozofsko društvo.

[52] Kovač, S. (2007), "Contradictions, Objects, and Belief". U: *Perspectives on Universal Logic*, ur. J.-Y. Béziau i A. Costa-Leite, Monza: Polimetrica, 417.–434.

[53] Kovač, S. (2013), *Svojstva klasične logike*, Hrvatski studiji Sveučilišta u Zagrebu, `https://www.hrstud.unizg.hr/images/50014310/Svojstva_klasicne_logike.pdf` (stranica posjećena: 1. lipnja 2017.)

[54] Kripke, S. A. (1975), "Outline of the Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 72 (19), 690–716.

[55] Laan, T. (1994), "A Formalization of the Ramified Type Theory", Technical Report 33, Computing Science Reports, Eindhoven University of Technology.

[56] Laan, T. i Nederpelt, R. (1996), "A Modern Elaboration of the Ramified Theory of Types", *Studia Logica*, 57, 243–278.

[57] Landini, G. (1989), "New Evidence Concerning Russell's Substitutional Theory of Classes", *Russell*, 9 (1), 26–42.

[58] Landini, G. (1996), "Will the Real *Principia Mathematica* Please Stand Up? Reflections on the Formal Logic of the *Principia*.". U: *Bertrand Russell and the Origins of Analytical Philosophy*, ur. R. Monk i A. Palmer, Bristol: Thoemmes Press, 287–330.

[59] Landini, G. (1998), *Russell's Hidden Substitutional Theory*, New York – Oxford: Oxford University Press.

[60] Landini, G. (2003), "Russell's Substitutional Theory". U: *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, ur. N. Griffin, Cambridge: Cambridge University Press, 241–285.

[61] Landini, G. (2004), "Russell's 'Separation' of the Logical and Semantic Paradoxes", *Revue Internationale de Philosophie*, 58 (229), 257–294.

[62] Landini, G. (2009), "Russell's Schema, Not Priest's Inclosure", *History and Philosophy of Logic*, 30, 105–139.

[63] Linsky, B. (1990), "Was the Axiom of Reducibility a Principle of Logic?", *Russell*, 10 (2), 125–140.

[64] Linsky, B. (1999), *Russell's Metaphysical Logic*, Stanford: CSLI Publications.

[65] Linsky, B. (2002), “The Resolution of Russell’s Paradox in *Principia Mathematica*”. U: *Philosophical Perspectives 16: Language and Mind*, ur. J. E. Tomberlin, Oxford: Blackwell, 395–417.

[66] Mares, E. D. (2007), “The Fact Semantics for Ramified Type Theory and the Axiom of Reducibility”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 48 (2), 237–251.

[67] Mihletić, F. (1912), “Principi matematike”, *Nastavni vjesnik*, 20, 510–523.

[68] Peano, G. (1906), “Super theorema de Cantor-Bernstein et additione”, *Rivista de matematica*, 8, 136–157.

[69] Peano, G. (1967) [engleski prijevod [71] (dio)], “The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method”. U: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, ur. J. van Heijenoort, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 85–97.

[70] Peano, G. (1973) [prvi put objavljeno kao [68]], “Supplement to ‘On the Cantor-Bernstein Theorem’”. U: *Selected Works of Giuseppe Peano*, ur. H. C. Kennedy, Toronto: University of Toronto Press, 206–218.

[71] Peano, I. (1889), *Arithmetice principia, nova methodo exposita*, Turin: Fratres Bocca.

[72] Peressini, A. F. (1997), “Cumulative versus Noncumulative Ramified Types”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 38 (3), 385–397.

[73] Poincaré, H. (1905-1906), “Les mathématiques et la logique”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13, 815–835; 14, 17–34, 294–317.

[74] Poincaré, H. (1909), “Le logique de l’infini”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 17, 461–482.

[75] Poincaré, H. (1910), “Über transfinite Zahlen”. U: *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände der reinen Mathematik und Physik*, Leipzig-Berlin: Teubner, 43–48.

[76] Poincaré, H. (1912), “Le logique de l’infini”, *Scientia*, 12 (24), 1–11.

[77] Prawitz, D. (1968), “Hauptsatz for Higher-Order Logic”, *Journal of Symbolic Logic*, 33 (3), 452–457.

[78] Priest, G. (1994), “The Structure of the Paradoxes of Self-Reference”, *Mind*, 103 (409), 25–34.

[79] Proops, I. (2011), “Russell on Substitutivity and the Abandonment of Propositions”, *Philosophical Review*, 120 (2), 151–205.

[80] Quine, W. V. (1937), “New Foundations for Mathematical Logic”, *The American Mathematical Monthly*, 44 (2), 70–80.

[81] Quine, W. V. (1955), “On Frege’s Way Out”, *Mind*, New Series, 64 (254), 145–159.

[82] Quine, W. V. O. (1969) [1. izdanje 1963.], *Set Theory and Its Logic* (revisited edition), Cambridge, Massachusetts – London: The Belknap Press of Harvard University Press.

[83] Ramsey, F. P. (1950) [1926], “The Foundations of Mathematics”. U: Ramsey, F. P. (1950) *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* (2. izdanje), ur. R. B. Braithwaite, London: Routledge and Kegan Paul Ltd., 1–61.

[84] Richard, J. (1905), “Les principes des mathématiques et le problème des ensembles”, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 16, 541.

[85] Richard, J. (1967) [engleski prijevod [84]], “The Principles of Mathematics and the Problem of Sets”. U: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, ur. J. van Heijenoort, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 142–144.

[86] Russell, B. (1905), “On Denoting”, *Mind*, 14 (56), 479–493.

[87] Russell, B. (1906a), “On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 4 (1), 29–53.

[88] Russell, B. (1906b), “Les paradoxes de la logique”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, 627–650. Objavljeno na engleskom kao [101].

[89] Russell, B. (1908), “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”, *American Journal of Mathematics*, 30 (3), 222–262.

[90] Russell, B. (1910a), “La théorie des types logiques”, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 18, 263–301.

[91] Russell, B. (1910b), *Philosophical Essays*, London: Longmans, Green, and Co.

[92] Russell, B. (1912a), “On the Relations of Universals and Particulars”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, New Series, 12, 1–24.

[93] Russell, B. (1912b), *The Problems of Philosophy*, New York: Henry Holt & Company.

[94] Russell, B. (1919a), *Introduction to Mathematical Philosophy*, New York: The MacMillan Co.

[95] Russell, B. (1919b), “On Propositions: What They Are and How They Mean”, *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, 2, 1–43.

[96] Russell, B. (1938) [1. izdanje 1903.], *The Principles of Mathematics* (2. izdanje), New York: W. W. Norton & Company.

[97] Russell, B. (1946) [1. izdanje 1944.], “My Mental Development”. U: *The Philosophy of Bertrand Russell* (2. izdanje), ur. P. A. Schilpp, Evanston, Illinois: The Library of Living Philosophers, Inc. 3–20.

[98] Russell, B. (1959), *My Philosophical Development*, New York: Simon and Schuster.

[99] Russell, B. (1973), *Essays in Analysis*, ur. D. Lackey, London: Allen & Unwin.

[100] Russell, B. (1973a) [rukopis iz 1906.], “On the Substitutional Theory of Classes and Relations”. U: Russell (1973), *Essays in Analysis*, ur. D. Lackey, London: Allen & Unwin, 165–189.

[101] Russell, B. (1973b) [prvi put objavljeno kao [88]], “On ‘Insolubilia’ and Their Solution by Symbolic Logic”. U: Russell (1973), *Essays in Analysis*, ur. D. Lackey, London: Allen & Unwin, 190–214.

[102] Russell, B. (1994) [hrvatski prijevod [86]], “O označavanju”, *Čemu : časopis studenata filozofije*, 1 (1), 54–65.

[103] Schröder, E. (1890), *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, sv. 1, Leipzig: Teubner.

[104] Soames, S. (2008), “No Class: Russell on Contextual Definition and the Elimination of Sets”, *Philosophical Studies*, 139 (2), 213–218.

[105] Sobociński, B. (1949), “L’analyse de l’antinomie russellienne par Lesniewski”, *Methodos*, 1, 94–107, 220–228, 308–316.

[106] Stevens, G. (2003a), “Re-Examining Russell’s Paralysis: Ramified Type Theory and Wittgenstein’s Objection to Russell’s Theory of Judgment”, *Russell*, 23 (1), 5–26.

[107] Stevens, G. (2003b), “The Truth and Nothing but the Truth, yet Never the Whole Truth: Frege, Russell and the Analysis of Unities”, *History and Philosophy of Logic*, 24, 221–240.

[108] Šikić, Z. (1986), “Cantor’s Theorem and Paradoxical Classes”, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 32, 221–226.

[109] Šikić, Z. (1987a), “Novija filozofija matematike”. U: *Novija filozofija matematike*, ur. Z. Šikić, Beograd: Nolit, 1–32.

[110] Šikić, Z. (1987b) (ur.), *Novija filozofija matematike*, Beograd: Nolit, 1–32.

[111] Šikić, Z. (1992), “The Diagonal Argument–A Study of Cases”, *International Studies in the Philosophy of science*, 6 (3), 191–203.

[112] Švob, G. (1992), *Frege: pojmovno pismo*, Zagreb: Filozofski fakultet, Odsjek za opću lingvistiku i orijentalne studije; Naprijed.

[113] Švob, G. (2009), *Od slike do igre*, Zagreb: ArTresor.

[114] Takahashi, M. (1967), “A Proof of Cut-Elimination Theorem in Simple Type Theory”, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 19 (4), 399–410.

[115] Tarski, A. (1933), *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Warszawa: Nakładem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

[116] Tarski, A. (1936) [prošireni njemački prijevod [115]], “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen”, *Studia Philosophica*, 1, 261–405.

[117] Tarski, A. (1944), “The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 4 (3), 341–376.

[118] Tarski, A. (1956) [engleski prijevod [116]], “The Concept of Truth in Formalized Languages”. U: Tarski, A. (1956), *Logic, Semantics, Metamatematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford: Clarendon Press, 152–278.

[119] Urquhart, A. (1988), “Russell's Zigzag Path to the Ramified Theory of Types”, *Russell*, 8 (1), 82–91.

[120] Vlastos, G. (1954), “The Third Man Argument in the *Parmenides*”, *The Philosophical Review*, 63 (3), 319–349.

[121] Whitehead, A. N. (1898), *A Treatise on Universal Algebra*, Cambridge: Cambridge University Press.

[122] Whitehead, A. N. i Russell B. (1925.–1927.) [1. izdanje 1910.–1913.], *Principia Mathematica*, sv. 1-3, 2. izdanje, Cambridge: Cambridge University Press.

[123] Zermelo, E. (1908), “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I”, *Matematische Annalen*, 65, 261–281.

[124] Žarnić, B. (1999), “Mathematical Platonism: from Objects to Patterns”, *Synthesis Philosophica*, 27–28, 53–64.

Životopis

Rođen 1979. u Pakracu. Osnovnu školu i gimnaziju završio u Garešnici. Diplomirao filozofiju i sociologiju na Hrvatskim studijima Sveučilišta u Zagrebu 2010. temom *Sekst Empirik i skeptikova vjerovanja*. Akademske godine 2011./2012. i 2012./2013. asistent na kolegijima *Osnovni problemi filozofije* i *Modalna logika* na Hrvatskim studijima. Od 2008. do 2016. radi kao nastavnik u srednjim školama u Garešnici i Daruvaru. Od 2016. zaposlen na Institutu za filozofiju u Zagrebu kao asistent-suradnik na projektu *Logika, pojmovi i komunikacija*. Glavno područje zanimanja: filozofijska logika.

Popis radova:

“Franciscus Patricius, Discussionum peripateticarum, tomus quartus / Frane Petrić, Peripatetičke rasprave, svezak četvrti”, *Prolegomena : časopis za filozofiju*, 12 (2013), 506–510.

“Kišobran za dvoje – Piron Elejski i David Hume o skeptikovim vjerovanjima”, *Scopus : časopis studenata filozofije Hrvatskih studija*, 21 (2005), 73–77.