Definabilnost i konačni modeli.

Zorica, Lucia

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet Hrvatskih studija

DEFINABILNOST

Završni rad

Lucia Zorica

dr. sc. Sandro Skansi

Zagreb, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Rad koji slijedi dotiče se dosadašnjih rezultata istraživanja definabilnosti u elementarnoj i modalnoj logici. Istražit će metode pristupa primjenjivane pri znanstvenom definiranju u formalnim jezicima, a na nekoliko mjesta će se osvrnuti i na metode definiranja u prirodnom jeziku kako bi se stekao dojam o razlikama u pristupu. U formalnim jezicima, definicija je identitet ili ekvivalencija. Pragmatički pristup nije primjenjiv na formalnim jezicima. Određene distinkcije između pojmova moguće je napraviti isključivo pomoću koncepata logičke semantike, kao primjerice distinkciju između globalne i lokalne definabilnosti. U tradicionalnim pristupima nije uvijek jasno da li je pretpostavljena kontingentnost određene definicije te da li je primjenjiva isključivo na stvarne objekte ili se njena priroda smatra nužnom i primjenjivom na sve moguće svjetove. Tradicionalni pogledi na definabilnost su često opskurni. Nije uvijek jasno što riječ "definabilnost" predstavlja. Čini se poželjnim definicije staviti u formalni okvir u kojem je moguće postići viši stupanj preciznosti – razmatrati definabilnost unutar teorije i definabilnost unutar modela umjesto definicija per se.

Ovaj rad će se osvrnuti na ideje koji se na određene načine nadovezuju na pojam definabilnosti u logici, kao što su realne i nominalne definicije, lokalne i globalne definicije, uvjetna definabilnost, identitet i identifabilnost, eliminabilnost i nekreativnost formule te sinonimnost. Centralni dio rada predstavljat će istraživanje modalne definabilnosti. Prenoseći neke od brojnih rezultata istraživanja u području elementarne i modalne logike, od C. I. Lewisa, preko E. W. Betha i J. Hintikke, sve do M. de Rijkea, J. Van Benthama i Y. Veneme, rad pruža kratak i sistematičan pregled ovih postignuća. Pozabavit će se teorijama točkovnih modela koje karakteriziraju izražajnu snagu modalne logike preko očuvanosti modalno definabilnih svojstava. Modalna logika se može promatrati kao fragment logike prvog reda. Neke modalne formule, čak i one veoma jednostavne, mogu definirati sustave svjetova i relacija koje niti jedna formula prvog reda ne može definirati.

Vrijedi i obratno – postoje sustavi koje je jako jednostavno definirati u logici prvog reda, dok ih niti jedna modalna formula ne može definirati. Definabilnost leži na ideji da je određena formula validna u određenom sustavu svijetova i relacija između istih. Veze se ostvaruju putem preslikavanja koje modalnim formulama pridružuje formule odgovarajućeg jezika prvog reda. Formula i njena translacija istinite su na istim modelima. Istinitost se u modalnim sustavima može promatrati lokalno, u izdvojenoj točki ili svijetu, ili globalno - kao istinitost u čitavom modelu, što se zove istinitošću univerzalne zatvorenosti standardne translacije. Priželjkivani rezultati ovog rada su raznovrsni. Prije svega, namjera je prikazati i definirati relevantne pojmove i distinkcije između različitih sustava koristeći formalne metode dokazivanja, te promatrati i staviti u kontekst neke od najvažnijih do sada dokazanih teorema.

Abstract

The following paper reflects on the results of researching the concept of definability in elementary and modal logic. It will explore various methods of approach applied to define notions in formal languages, while also reflecting on methods used in natural language to provide an impression of differences between these approaches. In formal languages, a definition is identity, or equivalency. The pragmatic approach is not applicable here. It is only possible to make certain distinctions between notions by means of logical semantics, one of these distinctions being the one between global and local definability. In traditional approaches, it is not always clear whether the contingency of a definition is assumed or not, and whether it's applicability is restricted to real, actual objects or can it be considered a necessity in all possible worlds. The traditional approach is often obscure. It's not always clear what the term 'definability' represents. Putting definitions in a formal framework which makes a higher degree of precision possible seems preferable – to discuss definability inside a theory or in a model rather than defi-

nitions per se.

This paper will reflect upon ideas in some way relatable to the notion of definability in logic, such as real and nominal definitions, local and global definitions, conditional definability, identity and identifability, eliminability and non-creativity of a formula, and synonymity. Conveying some of numerous accomplishments in the fields of mathematical and modal logic, from ones of C. I. Lewis, through those of E. W. Beth and J. Hintikka, all the way to M. de Rijke, J. Van Bentham and Y. Venema, this paper lays out a brief and systematic review of these accomplishments. It will consider the theory of pointed models which characterize the expressive power of modal logic through the preservation of modally definable properties. Modal logic can be seen as a fragment of first-order logic. Even some very simple modal formulas can define frames that no first-order formula can. It goes the other ways around as well – some frames are easily definable in first-order logic, while no modal formula manages to define them. Definability is set on the idea that a certain formula is valid in a certain model set of worlds and relations between those worlds. Connectivity is achieved by means of standard translation, a sort of mapping which maps modal formulas to corresponding first-order formulas. Both the formula and its translation have the same truth value in the same model. Truth in modal structures can be considered locally, in an individual point or an individual world; or it can be considered globally – as truth in the entire model. The anticipated outcomes of this paper are diverse. The intention is first of all to present and define some relevant concepts and make distinctions between different systems using formal proof methods, and to observe and contextualize some of the most important theorems proven so far.

2 Definicija

2.1 Definicija u logici. Pojmovi usko vezani uz koncept definabilnosti

Kažemo da je podskup A $\subset \mathbb{N}$ definabilan ako postoji neka formula ϕ(x) u jeziku $\mathscr{L}$ takva da a$\in$A ako ϕ vrijedi za a. Definabilan podskup je potpuno odrediv formulom u jeziku $\mathscr{L}$. Ako je svojstvo definabilno, mora postojati formula koja ga definira. U matematici i logici se neprestano traga za relacijama koje definiraju strukture. Matematička definicija je ekstenzija jezika $\mathscr{L}$ u jezik $\mathscr{L}$' teorije T; n-arna relacija ϕ u T je dodati "ϕ" u $\mathscr{L}$, te dodati aksiom sljedeće forme:

$$\forall(x_1,\ldots,x_n)\ (\phi\ (x_1,\ldots,x_n) \iff R(x_1,\ldots,x_n)$$

gdje je R n-arna relacija već sadržana u $\mathscr{L}$. Prvi pojam koji vrijedi razmotriti je **identitet**. Ako su dvije stvari identične, trebale bi biti međusobno nerazlučive – jer da se razlikuju u bilo kojem aspektu onda ne bi bile identične. Definicija, odnosno formula ϕ ne bi smjela, makar ekstenzionalno, varirati od onoga što definira. Svi članovi skupova trebaju biti jednaki, izrazi s obje strane jednakosti u jednadžbi - jednaki. Pojam bi uvijek trebalo biti moguće zamijeniti identičnim na način da rezultat ostane nepromijenjen. **Identifabilnost** je tako svojstvo usko vezano uz definabilnost. Pretpostavimo da se parametar pojavljuje u teoriji T(P) koja se bavi aktualnim iskustvenim fenomenima. Za takvu je svrhu teorija T(P) beskorisna ako vrijednost parametra ne može biti ustanovljena pomoću uočljivih podataka, a ako je logička struktura teorije T(P) određene vrste, to može biti u potpunosti **intrinzično** nemoguće – što je ideja koju označava pojam **neidentifabilnosti** parametra. Također, ono što se u metodološkim raspravama naziva definabilnošću je često zapravo identifabilnost. [1]

[1] HINTIKKA, Jaakko. "Towards a general theory of identifiability". U: FETZER, James H. (1991) *Definitions and Definability: Philosophical Perspectives.* Springer. 161-183

2.2 Vrste definicija

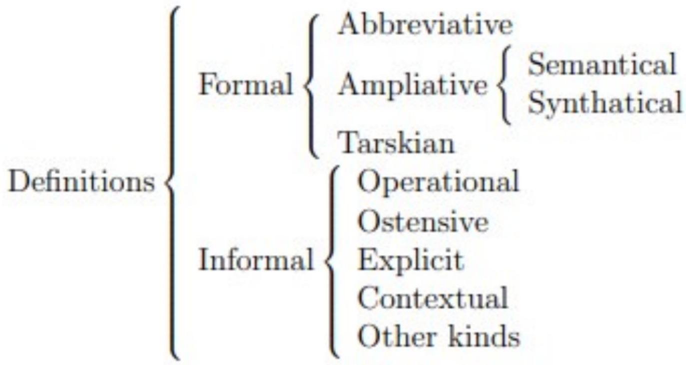
U idućim paragrafima slijedi formalna definicija osnovnih pojmova definabilnosti i identifabilnosti. Pristup definiciji koji nalaže da se definicija u potpunosti bavi samim simbolima, a ne onime što je simbolizirano se naziva intenzionalističkim, o čemu će biti još govora u poglavlju 3.4. Definicija je deklaracija da određeni novouvedeni simbol ili kombinacija simbola imaju značiti isto što i neka druga kombinacija simbola koja je već poznata[2]. Ovakav se tip definicije naziva **nominalnim**. Nominalna je definicija česta u matematici. Ona uspostavlja novi simbol za pojam (izraz). Moguće ju je gledati kao sporazum ili odluku o upotrebi simbola. Novi se simbol naziva *definiendum* i ima se koristiti za već poznatu grupu simbola koja se naziva definiens. Definiendum stoga ne smije imati drugih značenja uz *definiens*. Svrha nominalne definicije je prijava ili uspostava značenja simbola koja se postiže na dva načina: tako da se odredi značenje simbola ekvivalentno drugima (nominalne definicije), ili da se utvrdi da simbol označava stvar (realne definicije). **Realna** definicija se smatra istinskom propozicijom - istinitom ili neistinitom. Distinkcija između ove dvije vrste tradicionalnih definicija nije u potpunosti jasna. Tradicionalna definicija se zadovoljava razumijevanjem definicije općenito, kao tvrdnje koja uspostavlja značenje izraza. To postiže povezivanjem definiranog izraza (*definiendum*) za drugi izraz (*definiens*).[3]

2.3 Formalizacija

Neka je vokabular τ je set konstanti: predikata, funkcijskih simbola i pojedinačnih konstanti. Jezik $\mathscr{L}$ je jezik prvoga reda tipa τ, a P proizvoljna ne-logička konstanta koja nije u vokabularu τ. Prošireni jezik tipa U$\{$P$\}$ bit će označen kao

[2]WHITEHEAD, Alfred North, RUSSELL, Bertnard (1910) *Principia Mathematica*.

[3]SUPPES, Patrick (1957) *Introduction to Logic.* CARGILE, James H. "Real and Nominal Definitions". U: FETZER, James H. (1991) *Definitions and Definability: Philosophical Perspectives.* Springer. 21-51



Slika 1: Shematski prikaz – vrste definicija

$\mathscr{L}$(P). Što znači da je P definabilan u okviru τ? Predmet našeg zanimanja su zapravo relacije formula jezika $\mathscr{L}$ i jezika $\mathscr{L}$ (P). Formula (ili rečenica) je po običaju označena sa 'ϕ', a skup formula/rečenica kao Σ. ϕ i Σ u modelu M mogu biti istiniti (M $\models \phi, \Sigma$) ili neistiniti.

Bethov teorem[4] je teorem klasične logike prvog reda i jedno od značajnijih postignuća iste. Nalaže da teorija implicitno definira pojam T alp bilo koji od dva modela teorije u istoj domeni s istim ekstenzijama drugih primitivnih pojmova imaju istu ekstenziju za T. Teorem naznačava da je T implicitno definiran teorijom ako i samo ako je eksplicitna definicija tog pojma izvediva iz teorije. Povezuje teoriju dokaza s teorijom modela. Pretpostavimo gore navedeno (τ vokabular, $\mathscr{L}$ jezik tipa τ, P simbol predikata van τ, T(P) elementarna teorija). Sljedeći uvjeti su jednaki:

(i) Postoji formula ϕ(x) u $\mathscr{L}$ takva da:

[4]RANTALA, Veikko. "Definitions and definability". U: FETZER, James H. (1991) *Definitions and Definability: Philosophical Perspectives.* Springer; SUPPES, Patrick (1957) *Introduction to Logic.*

$$\text{T (P)} \vdash \forall(\text{P(x)} \leftrightarrow \phi \text{ (x)}).$$

Stavka (i) izražava eksplicitnu definabilnost P u T(P), odnosno činjenicu da je eksplicitna definicija P izvediva iz teorije T(P).

(ii) Ako Q simbolizira još jedan predikat van τ, a T(Q) teoriju u jeziku $\mathscr{L}$ (Q) dobivenu iz T(P) supstitucijom P za Q, onda:

$$\text{T(P) U T(Q)} \vdash \forall\text{x(P(x)} \leftrightarrow \text{Q(x))}.$$

Stavka (ii) izražava činjenicu da je P implicitno definabilan u T(P).

(iii) Za svaki model M u jeziku $\mathscr{L}$, model M ima najviše jednu ekspanziju (M, X) u jeziku $\mathscr{L}$(P) takvu da je (M, X) model teorije T(P).
Ovo je semantički pandan (ii) - ekvivalentnost (ii) i (iii) je neposredna i neovisna od pretpostavki elementarne logike. Ako (iii) opstaje, P se smatra identifabilnim u T(P).

Eksplicitna definabilnost i identifabilnost

P je eksplicitno definabilan u T(P) ako:

$$\text{T(P)} \vdash (\forall \text{ x)(Px} \leftrightarrow \text{D(x))}$$

uz uvjete da se P ne pojavljuje u definiensu D(x), da je x jedina pojedinačna varijabla u D(x), te da D(x) sadrži isključivo ne-logičke konstante iz T(P).

P je eksplicitno identifabilan u T(P) ako:

$$\text{T(P)} \vdash (\forall \text{ x)(Px} \leftrightarrow \text{D}(x, a_1, a_2, \ldots, a_k))$$

gdje $a_1, a_2, \ldots, a_k \in$ do(M).

Djelomična definabilnost i identifabilnost

Lokalna definabilnost se smatra normalnom vrstom definicije – eksplicitne globalne definicije su vrlo rijetke. U potpunoj teoriji, djelomična i eksplicitna definicija se podudaraju. P je djelomično (lokalno) definabilan u T(P) ako:

$$\text{T(P)}\vdash \bigvee \text{i } (\forall \text{x})(\text{Px}(\longrightarrow)\text{Di(x))}.$$

P je lokalno identifabilan u T(P) ako:

$$\text{M: T(P)} \vdash \bigvee \text{i } (\forall \text{x})(\text{Px})\longrightarrow \text{D}(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

po već navedenim uvjetima.

Implicitna definabilnost i identifabilnost

P je implicitno definabilan u T(P) ako:

$$(\text{T(P)} \wedge \text{T(P')}) \vdash (\forall \text{x})(\text{Px} \leftrightarrow \text{P'x})$$

gdje je teorija T(P') upravo poput T(P) osim što sadrži jedan novi predikat P' na mjestu na kojem T(P) sadrži P. U potpunosti jednako, P je implicitno identifabilan u T(P) ako:

$$\text{M: } (\text{T(P)} \wedge \text{T(P')}) \vdash (\forall \text{x})(\text{Px} \leftrightarrow \text{P'x}).$$

Kuekerov teorem[5] nalaže da su sljedeći uvjeti jednaki:

(i) Postoje formule σ(x) i ϕ_i(x,y)(i=1, ..., n) u jeziku $\mathscr{L}$ takve da:

$$\text{a) T(P)} \vdash \exists \text{x } \sigma(\text{x});$$

$$\text{b) T(P)} \vdash \forall x\sigma(x) \rightarrow \bigvee_{1\leq i\leq n} \forall y(Py) \leftrightarrow \phi_i(x,y))).$$

(ii) Za svaki model M u jeziku $\mathscr{L}$, postoji najviše n ekspanzija (M, X) modela M u jeziku $\mathscr{L}$(P) takvih da je (M,X) model teorije T(P).

Eksplicitna definicija koja proizlazi iz uvjeta a) i b) je sljedeća:

$$\forall \text{y}(\text{P(y)} \leftrightarrow \exists \text{ x}(\sigma(\text{x}) \wedge \phi_1(\text{x,y}))).$$

Kuekerov teorem se može shvatiti kao proširenje Bethovog jer nije ograničen na jednu ekspanziju već u obzir uzima n ekspanzija. U tom je kontekstu idući teorem još širi - **Chang-Makkaiov teorem**[6]u obzir uzima beskonačno mnogo ekspanzija. Sljedeći su uvjeti jednaki:

(i) Postoje formule ϕ_i(x,y)(i=1, ..., n) u jeziku $\mathscr{L}$ takve da:

$$\text{T(P)} \vdash \bigvee_{1\leq i\leq n} \exists y\forall y(Py) \leftrightarrow \phi_i(x,y))).$$

Teorija T(P) nalaže da postoji x za svaki y takav da je P(y) ekvivalentan formuli ϕ za neki i veći ili jednak 1 te manji ili jednak n).

(ii) Neka |M| označava kardinalnost modela M. Za svaki beskonačan model M u jeziku $\mathscr{L}$, postoji najviše |M| ekspanzija (M,X) modela M u jeziku $\mathscr{L}$(P) takvih da je (M,X) model teorije T(P).

---

[5]Isto.
[6]Isto.

Hintikka-Tuomela teorem[7] ističe kriteriji definabilnosti u modelima teorije. Sljedeći su uvjeti jednaki:

(i) Postoje formule ϕ_i(x)(i=1, ..., n) u jeziku $\mathscr{L}$ takve da:

$$\text{T(P)} \vdash \bigvee_{1 \leq i \leq n} \forall x(Px) \leftrightarrow \phi_i(x).$$

(ii) P je definabilan u svakom modelu T(P).

(iii) P je eksplicitno definabilan u svakoj konzistentnoj ekstenziji T(P).

Teorem tvrdi se da je P definabilan u modelu jezika $\mathscr{L}$ (P) ako je eksplicitna definicija $\forall$ x(Px)$\leftrightarrow$ ϕ_i(x) istinita u tom modelu. Moguće je tvrditi da je P djelomično definabilan u T(P) ako (i) opstaje. Ako je P djelomično definabilan, onda je P definabilan u svakom modelu teorije, ali definiens može biti drukčiji u različitim modelima, odnosno varirati ovisno o modelu teorije.

Uvjetna definabilnost

U konstrukciji teorija se često koriste uvjetne definicije više od eksplicitnih - ne pretpostavlja se da su definirani pojmovi unikatno primjenjivi na sve elemente dotičnih domena. Uvjetna definicija je definicija svojstva koje je definirano samo u određenom podskupu svemira, odnosno nije definirano u čitavoj domeni. Naprimjer, uobičajena definicija aritmetičkog dijeljenja mora isključiti uvjet dijeljenja s nulom. Također, kao prikladan primjer može poslužiti parnost. Neka je n prirodni broj (n $\in \mathbb{N}$). Kažemo da je n paran ako i samo ako je rezultat dijeljenja n s 2 prirodni broj. Broj π nije ni paran ni neparan - o parnosti iracionalnih brojeva nije moguće raspravljati - u skupu iracionalnih brojeva, parnost je uvjetno definirana (u podskupu $\mathbb{N}$). Kažemo da je P uvjetno definabilan u T(P) (u vokabularu τ) ako je uvjetna definicija izvediva iz T(P):

[7] Isto.

$$T(P) \vdash \forall(\sigma(x) \rightarrow (P(x) \leftrightarrow \phi(x))).$$

Pokazano je da ako je P eksplicitno definabilan u T(P), onda svaka interpretacija τ jedinstveno određuje interpretaciju P u smislu da svaki model $\mathscr{L}$ ima najviše jednu ekspanziju u model iz T(P). Ako P nije eksplicitno definabilan u T(P), teorija ostavlja slobodu pri interpretaciji P. Ta se sloboda također može smatrati vrstom nesigurnosti po pitanju interpretacije P. Samo ako je P eksplicitno definiran u teoriji je moguće znati kako je P interpretiran u proizvoljnom modelu te teorije na bazi saznanja o interpretaciji drugih konstanti. Hoće li se nedefinabilnost nazvati slobodom ili nesigurnošću ovisi o metodološkom pristupu. Globalna definabilnost omogućava smanjenje globalne nesigurnosti.

Definabilnost u teoriji modela[8]

P je definabilan (na temelju drugih pojmova u T(P)) u modelu M teorije T(P) ako i samo ako je eksplicitna definicija P istinita u M. Implicitna i eksplicitna definabilnost se podudaraju, a definabilnost P u svakom modelu T(P) je jednaka djelomičnoj definabilnosti. Također, ako je P eksplicitno ili implicitno identifabilan u svakom modelu T(P), onda je eksplicitno definabilan na temelju T(P). Navedeno ukazuje na ranije spomenutu usku povezanost identifabilnosti i definabilnosti.

Ako je $\mathscr{L}$ jezik (logika), $\models$ relacija istinitosti u $\mathscr{L}$, a K klasa $\mathscr{L}$ -modela, onda tvrdnja da je K definabilna u $\mathscr{L}$ znači da postoji rečenica ϕ u $\mathscr{L}$ takva da je K klasa svih modela u kojima je ϕ istinita, tako da sljedeće vrijedi za sve modele M:

$$M \in K \text{ akko } M \models \phi.$$

O modalnoj definabilnosti, čija je ideja ovdje samo kratko naznačena, bit će više

[8] Isto.

govora u idućem poglavlju. Svi važni matematički razredi, strukture i pojmovi nisu definabilni u elementarnoj logici (npr. konačni skupovi, izomorfne strukture, pojam dobro uređenih skupova, i slično). Prethodno navedeni teoremi ipak ukazuju na ravnotežu između ekspresivne snage i matematičke elegancije elementarne logike.

Definicija je u stanovitom smislu teoretski nepotrebna – uvijek je moguće koristiti definiens, a definiendum izostaviti.[9] Ova ideja određuje **pojam eliminabilnosti**. P je eliminabilan u teoriji T(P) ako za svaku formulu ϕ u jeziku $\mathscr{L}$ (P) postoji formula ϕ‘ u jeziku $\mathscr{L}$ takva da:

$$\mathrm{T}\ (\mathrm{P}) \vdash \phi \leftrightarrow \phi‘\ ;\ \text{odnosno da } \mathrm{T}\ (\mathrm{P}) = \mathrm{Cn}(\ \Sigma \cup \delta),$$

pri čemu je δ neka definicija P u vokabularu τ. Po Bethovom teoremu je dokazivo da eksplicitna definabilnost implicira eliminabilnost. T(P) je po navedenome svediva na teoriju u jeziku $\mathscr{L}$ čiji je vokabular jednostavniji – u ovom slučaju na teoriju Cn(Σ). Otvara se prostor pokušaju redukcije matematičkih teorija na logičke u stanovitom smislu[10]. Formula koja uvodi novi simbol u teoriju zadovoljava kriterij eliminabilnosti ako i samo ako vrijedi da kad god se ta formula pojavljuje, već postoji formula druga formula po svemu identična osim po tome što se u njoj novi simbol ne pojavljuje, te su stoga iz nje već izlučivi jednaki rezultati[11].**Koncept nekreativnosti** se nadovezuje na koncept eliminabilnosti prethodno izložen. Neka δ bude bilo koja rečenica u jeziku $\mathscr{L}$ (P) koja se koristi kako bi se proširio Σ i konstruirala T(P). Rečenica δ je nekreativna u T(P) ako bilo koji teorem u T(P) koji ne sadrži P već može biti izveden iz Σ, odnosno ako za bilo koju rečenicu ϕ u $\mathscr{L}$ vrijedi T(P) $\vdash \phi$, a ujedno vrijedi da $\Sigma \vdash \phi$. Ako je δ nekreativna formula, u jeziku $\mathscr{L}$ se ne postižu nikakve posljedice uvođenjem δ.[12]

[9] WHITEHEAD, Alfred North, RUSSELL, Bertnard (1910) *Principia Mathematica.*

[10] RANTALA, Veikko. "Definitions and definability." U: FETZER, James H. (1991) *Definitions and Definability: Philosophical Perspectives.* Springer

[11] SUPPES, Patrick (1957) *Introduction to Logic.*

[12] RANTALA, Veikko. "Definitions and definability." U: FETZER, James H. (1991) *Definitions*

3 Definicija u modalnoj logici

U idućim paragrafima će se promatrati modalna definabilnost točkovnih modela. Prije svega će se u kratkim crtama odrediti pojmovi koji predstavljaju sastavnice modalne logike te ih je potrebno poznavati za razumijevanje struktura o kojima će se nadalje raspravljati. Formule modalne logike su induktivno definirane iz Booleove logike:

(i) Svaka atomska propozicijska varijabla (koja predstavlja tvrdnju koja je ili istinita ili neistinita) je formula.

(ii) Ako su P i Q formule, onda su $\neg$ P, P $\wedge$ Q, P $\vee$ Q i P $\rightarrow$ Q također formule.

(iii) Ako je P formula, onda su $\Box$P i $\Diamond$P također formule.

3.1 Modalni jezik[13]

Modalna logika je formalizacija relacijskih struktura koja, u usporedbi s logikom prvog reda, ima jednostavniju sintaksu koja omogućuje odlučivost, te specifični lokalni pogled iznutra na relacijske strukture. Modalni jezici su jednostavni, ali izražajni jezici za opis relacijskih struktura koji omogućuju interni, lokalni pogled na relacijske strukture te nisu izolirani formalni sustavi. Modalna logika je u značajnoj mjeri motivirana potrebom da se formaliziraju nužnost i mogućnost, znanje i vjerovanje, dokazivost i mnoga druga svojstva koja se mogu smatrati operatorima na logičkim sudovima. Modalna logika jednostavnom sintaksom osigurava odlučivost *(decidability)* te predstavlja snažan alat za opisivanje relacijskih struktura.

---

and Definability: Philosophical Perspectives. Springer ;SUPPES, Patrick (1957) *Introduction to Logic.*

[13]Za definiranje jezika u paragrafu ispod korišteno: BLACKBURN, Patrick; DE RIJKE, Maarten; VENEMA, Yde (2002) *Modal Logic.* Cambridge University Press; LIBKIN, Leonid (2012) *Elements of Finite Model Theory.* Springer

Jezik modalne logike proširuje jezik logike sudova modalnim operatorima. Rad će se osvrnuti na osnovni modalni jezik, koji ima modalni operator $\Box$, a operator $\Diamond$ odnosno izraz $\Diamond\ \phi$ može biti tumačen kao kratica za $\neg\ \Box\ \neg\ \phi$.

Okvir za osnovni modalni jezik je relacijska struktura (W,R) gdje je $\mathbf{W} \neq \emptyset$ je skup svjetova (w_1, w_2, w_3...) kojeg se čini prikladno nazvati **svemir**, a **R** je binarna **relacija dostupnosti** u svjetovima u W. Elementi svemira, označeni kao **w**, nazivaju se **svjetovi**.

Model je uređena trojka (W,R,V) u kojoj je je (W,R) okvir, a V valuacija, odnosno funkcija dodjeljivanja koja dodjeljuje istinitosnu vrijednost propozicijskim varijablama u svakom pojedinačnom svijetu, odnosno svakoj propozicijskoj varijabli p pridružuje podskup svemira a(p). Propozicijska varijabla p je **istinita** (w $\models$ p) u svijetu w $\in$ W ako je w $\in$ V(p). Formule nastale primjenom modalnog operatora se navode kao w $\models \Box\ \phi$ ako za svaki v $\in$ W takav da je wRv vrijedi v $\models \phi$.

Formula je valjana na okviru (W,R) ako je istinita u svakom svijetu za svaku valuaciju na tom okviru. Npr. formula $\Box$p $\rightarrow$ p je valjana na (W,R) ako i samo ako je R refleksivna relacija, a formula $\Box$p $\rightarrow$ $\Box\Box$p je valjana na (W,R) ako i samo ako je R tranzitivna. Običaj je reći da formula $\Box$p $\rightarrow$ p definira refleksivnost, a formula $\Box$p $\rightarrow$ $\Box\Box$p definira tranzitivnost. Refleksivnost i tranzitivnost su primjeri **modalno definabilnih svojstava relacija**.

Svi sustavi u modalnoj logici su izgrađeni na konceptu temeljnog sustava K. U sustavu K, model je sačinjen od uređene trojke (W,R,V), gdje je W skup svjetova (w_1, w_2, w_3...), R binarna relacija u svjetovima u W - *accessability relation* odnosno relacija dostupnosti, a V funkcija dodjeljivanja koja dodjeljuje istinitosnu vrijednost propozicijskim varijablama u svakom pojedinačnom svijetu.

Mijenjanjem relacije dostupnosti R se mijenja sustav - ostala pravila ostaju ista.

Postoji nekoliko važnih sustava modalne logike:

(i) K sustav, temeljni sustav u kojem je osnovna relacija ekvivalencije bisimulacija.

(ii) M (poznat i kao T) u kojem se relaciji dostupnosti dodaje svojstvo refleksivnosti
$\forall$x(xRx) odnosno $\Box$p $\to$ p

(iii) B, sa svojstvima refleksivnosti i simetričnosti
$\forall$x(xRx) odnosno $\Box$p $\to$ p
$\forall$x $\forall$y (xRy $\to$b yRx)

(iv) S4, u kojem se dodaju svojstva refleksivnosti i tranzitivnosti
$\forall$x(xRx) odnosno $\Box$p $\to$ p
$\forall$x $\forall$y $\forall$z ((xRy $\wedge$ yRz) $\to$ xRz) odnosno $\Box$p $\to$ $\Box\Box$p

(v) S5, sa svojstvima refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti
$\forall$x(xRx) odnosno $\Box$p $\to$ p
$\forall$x $\forall$y (xRy $\to$b yRx)
$\forall$x $\forall$y $\forall$z ((xRy $\wedge$ yRz) $\to$ xRz) odnosno $\Box$p $\to$ $\Box\Box$p

Formula ϕ je modalna formula tipa τ. Formula ϕ karakterizira, odnosno definira klasu K ako u svim sustavima iz svakog sustava koji je u K proizlazi da ϕ. Za skup modalnih formula vrijedi isto. Modalna formula definira klasu sustava ako ta formula precizno ustanovljuje modalne sustave svjetova i relacija koji se u toj klasi nalaze putem pojma valjanosti. Validnost formule označava da je formula ϕ validna u sustavu svjetova i relacija F ako je istinita u svakom modelu i u svakom stanju u sustavu.

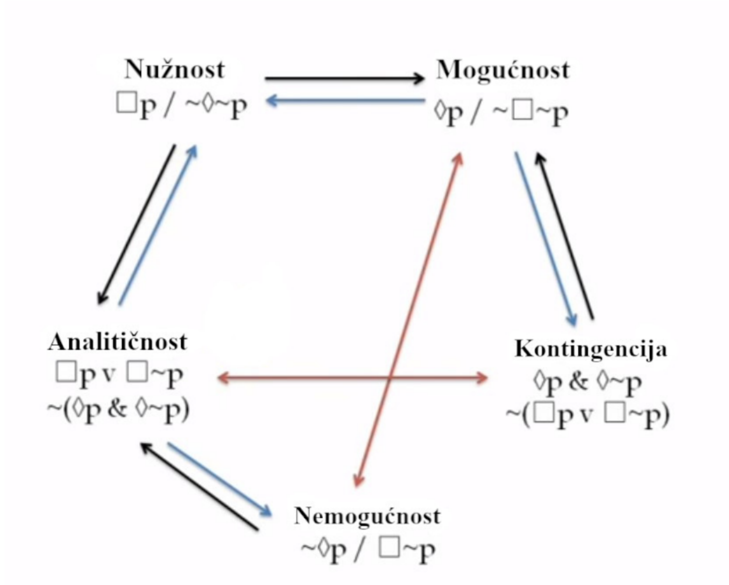
Formula ϕ najčešće označava svojstvo klase, poput nužnosti, mogućnosti, kontingencije, analitičnosti i nemogućnosti. Tako, primjerice, formula p $\to$ $\Diamond$p definira klasu refleksivnih sustava, odnosno definira refleksivnost.

Neke od primjena modalne logike su više sintaktičke prirode, orijentirane k aksiomima, zakonima, principima. Ako se odrede klase $K_1,\ldots,K_n$ modalnih sustava koje ove formule definiraju, stječe se matematička perspektiva na njihov sadržaj. Iz toga proizlazi važnost definabilnosti. Primjene modalne logike mogu biti i semantičke prirode, što bi značilo da je njihova orijentacija pretežito ka klasama, svjetovima i relacijama.

3.2 Formalizacija osnovnih pojmova modalnog jezika

Formule su u modalnoj logici formalizirane na način da ϕ := p | $\perp$ | $\phi \to \psi$ | $\Diamond\ \phi$. Svemir W je definiran u modelu tako da M = (W,R,V), W $\neq \emptyset$ s relacijom dostupnosti R $\subseteq$ W × W. Valuacija, odnosno funkcija dodjeljivanja V definirana je izrazom p $\to$ V(p) $\subseteq$ W. Globalna istinitost definirana je na način da M $\models \phi$ akko M $\models \forall$xSTx (ϕ). Formula ϕ je ispunjiva u M akko M $\models \exists$xTx (ϕ)
Formule istinitosti koje vrijede unutar sustava mogu se zapisati na sljedeći način:

$$\text{M,w} \models \text{p akko w} \in \text{V(p)}$$
$$\text{M,w} \models \phi \text{ akko M} \models \text{STx } (\phi)\text{(w)}$$
$$\models \phi \wedge \psi \text{ akko M} \models \phi \text{ i M} \models \psi$$
$$\text{M,w} \models \Box\ \phi \text{ akko za sve v} \in \text{W vrijedi wRv} \to \text{M,v} \models \phi$$
$$\text{M,w} \models \Diamond\ \phi \text{ akko za neki v} \in \text{W vrijedi wRv} \wedge \text{M,v} \models \phi$$



Slika 2: Shematski prikaz modaliteta i relacija između istih. Crna strelica označava zahtjev ili implikaciju - siguran odnos; npr. ako je nužno, onda je sigurno i moguće. Plava strelica označava 'labaviji' odnos - opstoji ili jedno ili drugo... mogućnost za opstanak treba ili nužnost ili kontingentnost. Crvena strelica označava logičku kontradikciju. Posebnu pažnju vrijedi obratiti na to da nemogućnost i nužnost nisu logičke kontradikcije jer negacija u nemogućnosti nije ispred □ operatora, već iza. Također, kontingentnost se može nazvati sintetičnim (nasuprot analitičnom) svojstvom u smislu da vrijednost p smije biti i *true* i *false*, dok analitičnost zahtijeva isključivost tih slučajeva. Npr. riječ bachelor je analitički pojam – "*All bachelors are unmarried*" je uvijek istinita tvrdnja jer tako definiramo riječ; isto kao što su tvrdnje „Voda je H_2O“, „Srebro ima protonski broj 47“ i mnoge slične tvrdnje uvijek istinite a priori – ili po definiciji.

3.3 Modalna definabilnost

Neka je K klasa točkovnih modela. Skup formula Σ definira K ako za svaki točkovni model (M, w) vrijedi (M, w) $\in$ K akko M, w $\models \Sigma$. Dakle, klasa K je lokalno definabilna ako postoji skup formula Σ takav da K = $\{$(M,w) : M,w $\models \Sigma\}$. Klasa K je globalno definabilna ako postoji Σ takav da: K = $\{$M : M $\models \Sigma\}$. Okvir F je modalno definabilan ako postoji Σ takav da Fr(Σ) = $\{$F : F $\models \Sigma\}$.

Klasa K je $\exists$-definabilna ako postoji Σ takav da su u K točno oni modeli u kojima je svaka formula iz Σ ispunjiva. K je $\forall\exists$-definabilna ako postoji par $\Sigma_1, \Sigma_2)$ skupova formula takvih da su u K točno modeli na kojima je svaka formula iz Σ_1 globalno istinita i svaka formula iz Σ_2 ispunjiva. K je poopćeno definabilna ako je definirana nekim skupom S rečenica prvog reda dobivenih od nekih $\forall$xSTx (ϕ) i $\exists$xSTx (ϕ) pomoću logičkih veznika.

Kao što je već istaknuto, kažemo da je određena klasa struktura K modalno definabilna ako postoji skup modalnih formula Σ koji je definira. A koja su svojstva modela uopće definabilna modalnim formulama? Neki od primjera modalno definabilnih formula su sljedeći:

(i) Formule refleksivnosti okvira $\Box \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ **i** $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$

(ii) Formule tranzitivnosti okvira $\Box \mathbf{p} \rightarrow \Box \mathbf{p}$ **i** $\Diamond\Diamond \mathbf{p} \rightarrow \Diamond \mathbf{p}$

(iii) Formula klase svih euklidskih okvira (O, $e_1, \ldots, e_n$) koji omogućuju definiranje karte u Euklidskom prostoru $\Diamond \mathbf{p} \rightarrow \Box\Diamond \mathbf{p}$

(iv) Löbova formula $\Box(\Box \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \Box \mathbf{p}$

Nastavimo s formuliranjem rezultata u sustavu modela u kojem postoji modal similarity type τ, a model je par (M,w) u kojem je M model tipa τ a w stanje ili svijet u M.

Ultraprodukt $\prod$ je količnik izravnog proizvoda obitelji struktura. **Bisimulacija** je binarna relacija između sustava prijelaza stanja, pridružujući sustave koji se ponašaju na isti način u smislu da jedan sustav simulira drugi i obrnuto. To je osnovna relacija među Kripkeovim modelima. Klasa točkovnih modela K je zatvorena pod bisimulacijom ako (M, w) u K i M, w $\leftrightarrow$ N, v implicira (N, v) u K. Klasa K je zatvorena pod ultraproduktom ako ijedan ultraprodukt $\prod U_c$ (M_i, w_i) iz sustava modela (M_i, w_i) u K pripada K. Ako je K klasa τ -modela, K^C označava komplement K unutar klase svih τ modela. Konačno, K je definablna skupom modalnih formula ako postoji skup modalnih formula Γ takav da za bilo koji model (M, w) postoji (M, w) u K akko za svaki $\gamma \in \Gamma$, M, w $\models \gamma$; K je definabilna samostalnom modalnom formulom akko je definabilna jednim skupom. Definabilne klase modela moraju biti zatvorene pod bisimulacijama i ultraproduktima. Teoremi ispod[14] pokazuju da su ova dva uvjeta zatvorenosti dovoljna za potpun opis klasa ovakvih modela koji su definabilni modalnim formulama.

Teorem 1. Neka je τ *modal similarity type*, a K klasa točkovnih τ -modela.

Sljedeći uvjeti su jednaki:

(i) K je definabilna skupom modalnih formula.

(ii) K je klasa zatvorena pod bisimulacijama i ultraproduktima, dok je K^C zatvorena pod ultrapotencijama.

Dokaz. Pretpostavimo da K i ^{C} zadovoljavaju navedene uvjete zatvaranja. Primijetimo da je ^{C} zatvoren pod bisimulacijama, kao i K. Definiramo T kao skup modalnih formula koje vrijede u K:

$$T = \{\phi \mid \text{za sve (M,w) u } K\text{: M, w} \models \phi\}.$$

[14] BLACKBURN, Patrick; DE RIJKE, Maarten; VENEMA, Yde (2002) *Modal Logic*. Cambridge University Press

Pokazat ćemo da T definira klasu K. Po definiciji je svaki točkovni model (M, w) u K model koji zadovoljava T u smislu da M, w $\models$ T. Pretpostavimo da M, w $\models$ T; kako bi dovršili dokaz, pokazujemo da (M, w) mora biti u K.

Neka je Σ modalna teorija w; odnosno skup Σ = $\{\phi \mid$ M, w $\models \phi\}$. Očito je da je Σ konačno zadovoljiva u K; dok skup $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \Sigma$ nije zadovoljiv u K. Onda je formula $\neg$ $(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$ istinita u svim točkovnim modelima u K, tako da bi pripadala T, ali bila neistinita u M, w. Sljedeći navodi pokazuju da je Σ zadovoljiva u ultraproduktu modela u K.

Tvrdnja 1. *Neka je Σ skup modalnih formula, a K klasa modela u kojima je Σ konačno zadovoljiv. Onda je Σ zadovoljiv u nekom ultraproduktu modela u K.*

U puni dokaz tvrdnje se u ovom radu neće ulaziti.[15]

Dolazi do sljedeće formalizacije dokaza tvrdnje:

$$\{\text{i} \in \text{I} \mid N_i,\, v_i \models \sigma\} \supseteq \sigma\text{'} \wedge \sigma\text{'} \in \text{U}.$$

Iz čega proizlazi zatvorenost K pod ultraproduktom, Σ zadovoljiv u nekom točkovnom modelu (N, v) u K. N, v $\models \Sigma$ implicira da su v i modalno ekvivalentni. Po prethodnom teoremu vrijedi da postoji ultrafiler U takav da:

$$\prod \text{U' (N, v)},(f_v)\text{U} \leftrightarrow \prod \text{U'(M, w)},(f_w)\text{U}.$$

Točkovni model ($\prod$U' (N, v),(f_v)U) pripada K, iz čega proizlazi da je (M, w) također u K, što dovršava ovaj dokaz.

[15]Za puni dokaz vidi: BLACKBURN, Patrick; DE RIJKE, Maarten; VENEMA, Yde (2002) *Modal Logic.* Cambridge University Press. 107-110

Teorem 2. Neka je τ modal similarity type, a K klasa točkovnih τ -modela.

Sljedeći uvjeti su jednaki:

(i) K je definabilna pojedinačnom modalnom formulom.

(ii) K i K^C su zatvorene pod bisimulacijama i ultraproduktima.

Dokaz. Pretpostavimo smjer od (ii) prema (i), odnosno da K i K^C zadovoljavaju navedene uvjete zatvorenosti. Onda su obje klase zatvorene pod ultraproduktima. Po prethodno dokazanom teoremu, postoje skupovi modalnih formula, nazovimo ih T_1 i T_2.

Neka T_1 definira K, a T_2 neka definira K^C. Ne postoji točkovni model (M, w) takav da (M, w) $\models$ T1 $\cup$ T2. Stoga, moraju postojati $\phi_1, \ldots, \phi_n \in T_1 i \psi_1, \ldots, \psi_m \in T_2$ takvi da za sve točkovne modele (M, w) vrijedi:

$$\text{M, w} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \rightarrow \neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m$$

Dokaz je dovršen demonstriranjem da je klasa K definirana konjunkcijom $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$. Po definiciji, za svaki (M, w) u K vrijedi M, w $\models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$. Također, ako M, w $\models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$, onda M, w $\models \neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m$. Iz toga proizlazi da (M, w) ne pripada u K^C, ali pripada u K.

Ova dva teorema odgovaraju analognim rezultatima definabilnosti u logici prvog reda, zbog čega se njihove rezultate može generalizirati na modalnu logiku koja ima standardnu translaciju u logiku prvog reda.

De Rijkeov teorem

Neka je K klasa točkovnih modela. Tada vrijedi:

1. Klasa *K* je modalno definabilna akko ima svojstva bisimulacije, ultraproduktivnosti i zatvorenosti komplementa na ultrapotencije
2. Klasa *K* je modalno definabilna jednom formulom akko ima svojstva bisimulacije, ultraproduktivnosti i zatvorenosti komplementa na ultraprodukte

Van Benthemov teorem karakterizacije

Formula prvog reda F(x) je ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule akko je invarijantna na bisimulacije, odnosno akko za sve bisimilarne točkovne modele (M, w) i (M', w') vrijedi:

$$\text{M} \models \text{F(x)(w) akko M'} \models \text{F(x)(w')}$$

3.4 Kritika modalne logike

U sljedećim paragrafima ćemo se nakratko osvrnuti na prigovor modalnoj logici koji je uložio Willard V.O. Quine. Definicija sinonimnosti dva pojma se pokazuje kao relevantna ideja u razmatranju definabilnosti - da li je sinonimnost međusobna zamjenjivost pojmova? Ako neki pojam x može biti definiran kao neki pojam y, onda je x nužno y, i samo y.

Primjer sinonimnosti dao je Alfred Tarski: *Brother* je *male sibling*[16] ako i samo ako je *brother* nužno *male sibling*. Ideja korištenja nužnosti je u ovom slučaju obećavajuća, no problem koji nameće je taj što je potrebno koristiti upravo nužnost kako bi se definirala nužnost, odnosno osloniti se na pojam analitičnosti ($\Box p \vee \Box \neg p$). Definicija analitičnosti postaje problematična. Pri definiciji se nametala i ideja disjunktivnog zaključka, ideja da analitičnost nije definirana pravilom, već

[16]Mora postojati prikladna analogija i u hrvatskom jeziku, ali sam u radu odlučila koristiti izvorni primjer. Budući da se oba pojma na hrvatski prevode kao *brat* jer ne postoji prikladan (direktni) prijevod za riječ *sibling*, primjer je bilo neophodno navesti na engleskom jeziku.

dugačkom disjunkcijom izjava/tvrdnji koje su analitične. Disjunktivni zaključak je česta alternativna pojava u teorijama koje se ne uspijeva definirati pomoću uočene pravilnosti u strukturi, odnosno sličnosti između svih članova skupa (npr. kako odgovoriti na pitanje „Što je umjetnost?“ – po jednoj od teorija, odgovor na ovo pitanje nije moguće pružiti ikako osim disjunktivno). Po ovoj je ideji analitičnost svojstvo koje se pripisuje propozicijama bez mogućnosti preciznog definiranja. Moguće je samo prepoznati niz pojedinačnih stavova koji posjeduju svojstvo analitičnosti. Kada je prirodni jezik u pitanju, disjunktivni zaključci su češći, dok u strogo formalnim jezicima većinom nisu slučaj. Problem disjunktivnog zaključka odnosno definiranja analitičnosti kroz dugačak popis disjunktivnih tvrdnji je što ne postoji način na koji bi bilo moguće odrediti da li je popis na raspolaganju točan - ne postoji kriterij odlučivanja ni način određivanja što pripada a što ne pripada kojoj kategoriji pojmova, itd.

U teoriji skupova je moguće s preciznošću utvrditi da neki element $n \in \mathbb{N}$ pripada specifičnom podskupu $\mathbb{N}$. Postoji beskonačno mnogo podskupova $\mathbb{N}$ koje nije moguće definirati. Dolazi li time sama definabilnost u pitanje? Podskup je definabilan ako postoji formula u jeziku $\mathscr{L}$ koja obuhvaća sve njegove članove.

Primjer 1. *Parabola, skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od zadane točke i zadanog pravca definirana je grafom kvadratne funkcije oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

C.I. Lewis je osmislio striktnu pogodbu $\Box(p \rightarrow q)$, koju je smatrao je intuitivnom. Može se reći da p implicira q samo kada je to nužno slučaj, odnosno kada u svakom mogućem svijetu u kojem je p iz p proizlazi q. Pogodbi se pripisuju dva značenja: kondicional i implikacija. Pogodba kao kondicional je veznik koji spaja različite tvrdnje; kondicional zahtijeva upotrebu pojma, a ne njegovo spominjanje i ne odnosi se na imena stvari, već na same stvari, odnosno tvrdnje. Kondicional koristi objektni jezik.

Pogodba kao implikacija predstavlja u tom smislu upravo suprotno – pojmovi se ne upotrebljavaju, već spominju; koristi se metajezik. Stav Willarda V.O. Quinea je sljedeći: Lewis je pomiješao dva pojma implikacije, što je izazvalo probleme; moguće je prihvatiti kondicional bez prihvaćanja implikacije; npr. moguće je prihvatiti formulu $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ kao važeću (ona jest logička istina) bez prihvaćanja implikacije odnosno značenja formule na konkretnom primjeru kao važećeg. Za potpuno razumijevanje Quineovog prigovora, potrebno je definirati i svojstva ekstenzionalnosti i intenzionalnosti.

Ekstenziju pojma čini skup stvari na koje se taj pojam referira, odnosno skup stvari koje pojam označava. Intenzija pojma je, s druge strane, njegovo generalno značenje, odnosno definicija u riječniku. Ekstenzionalnost pruža ekstrinzični, "izvanjski" pogled na skup, dok intenzionalnost pruža intrinzični, pogled iznutra - što je očito iz etimologije samih pojmova. Značenja su se u vrijeme nastanka Quineovog djela Two Dogmas of Empiricism tumačila kao propozicije, apstraktni entiteti izraženi pomoću rečenica. Quine je dao prigovor propozicijskoj teoriji analitičnosti koji je bio uvelike oslonjen na neodređenost prijevoda - da propozicije postoje, prijevod bi uvijek bio odrediv. U stvarnosti nije tako. U kontekstu prirodnog jezika, kažemo da su dvije rečenice sinonimne ako služe otprilike istoj kontekstualnoj prilici. Takve će rečenice rijetko biti relevantne za područje istraživanja matematičke logike[17]

Quine je bio esktenzionalist. Čini se sigurnim pretpostaviti da nije bio oduševljen idejom da ekstenzionalnost ne može funkcionirati u području modalne logike. Svaka tvrdnja istinita u stvarnosti u modalnoj logici nije nužna, jer ne označava nužnost u svim mogućim svjetovima. Fundamentalna razlika između standardnih operatora i modalnih operatora je upravo u tome što je modalna logika uvela intenzionalnost kao primarni interes. U logici se ekstenzionalnost referira na princip po kojemu su objekti jednaki ako imaju ista vanjska svojstva. U suprotnosti, inten-

[17] LYCAN, William G. “Definition in a Quinean World”. U: FETZER, James H. (1991) *Definitions and Definability: Philosophical Perspectives.* Springer. 111-135; QUINE, Willard V. O. (1951) *Two Dogmas of Empiricism.*.

zionalnost smatramo principom koji ispituje da li su unutarnje definicije objekata iste kako bi ih proglasili jednakima.

Primjer 2. *Funkcije f(n) i g(n):*

$$f(n) = (n + 1) \times 2;$$

$$g(n) = (n \times 2) + 2.$$

Ekstenzionalno, ove su funkcije jednake – za isti n kao rezultat uvijek daju istu vrijednost. Intenzionalno, definicije ovih funkcija nisu jednake, stoga po principu intenzionalnosti ove funkcije nisu iste.
Dok se ekstenzionalizam čini kao poprilično jasan i prije svega uredan način manevriranja sa strukturama, za intenzionalizam se ne može reći isto. Quine je smatrao da bi istinitost trebala ovisiti o tome koji je pojam označen, a ne o tome kako je označen. Ako istinitost ovisi o tome kako je pojam označen, otvaraju se vrata mnogobrojnim komplikacijama. Intenzionalnost uključuje ideje poput značenja, sinonimije, svojstva, kvalitete, i dr., koje se smatraju problematičnima zbog stupnja kompleksnosti koji uvode u sustav. Ekstenzionalističkim je pristupom ovo moguće izbjeći – ali uz cijenu koja se čini nepotrebno visokom.

4 Zaključak

U radu je istaknuta potreba formalizacije definicije u formalnim jezicima. Kroz razmatranje modalne definabilnosti i ostalih prikazanih svojstava modalne logike moguće je zaključiti da je najveća prednost sustava modalne logike je snažna odlučivost. Dok se u velikoj mjeri može smatrati fragmentom logike prvog reda, sustav modalne logike pruža niz novih mogućnosti. Kao što je rečeno, neke modalne formule mogu definirati sustave svjetova i relacija koje niti jedna formula prvog reda ne može definirati. Modalna logika je relativno svježa grana logike, začeta početkom i definitivno ustanovljena sredinom 20. stoljeća. Držim da formalizaciju mogućnosti i nužnosti, o kojoj se dugo raspravljalo, treba smatrati značajnim napretkom. Od posljednjih relevantnih postignuća i proširenja spoznaja o modalnoj definabilnosti nije prošlo mnogo. Iako za sada ne postoji mnoštvo načina da se modalna logika primijeni, daljnje teoretsko proučavanje modalne logike i definabilnosti unutar iste djeluje zanimljivo i obećavajuće.

5 Sažetak

Kroz prethodne paragrafe uspjela sam pregledati neke od najvažnijih pojmova vezanih uz definabilnost te pružiti njihove formalne definicije. Pokazano je kako je najprije potrebno razjasniti vrstu definicije o kojoj je riječ da bi se uopće raspravljalo o definabilnosti koncepta, uzevši u obzir da se definabilnost različitih struktura ponaša drugačije, odnosno funkcionira po različitim pravilima. O pitanjima koja se tiču definabilnosti je poželjno raspravljati u formalnom odnosno aksiomatskom okviru. Rasprave o definabilnosti van takvog okvira su često opskurne i svodive na mišljenja. Po raznim primjerima na koje se naišlo tijekom rada moguće je doći do zaključka da se primjena formalnih procedura karakteristična za matematičku logiku u pristupu definabilnosti pokazala vrlo korisnom.

Dotaknuti su dosadašnji rezultati formaliziranja definabilnosti u elementarnoj i modalnoj logici te istražene metode pristupa primjenjivane pri znanstvenom definiranju u formalnim jezicima. Metode definiranja u prirodnom jeziku nisu u potpunosti zanemarene s ciljem da se stekne dojam o razlikama u pristupu. Razmotreni su pojmovi povezani s pojmom definabilnosti u logici – odgovoreno je na pitanja što znači da je definicija realne ili nominalna, lokalna ili globalna, uvjetna ili eksplicitna, što su identitet i identifabilnost, što eliminabilnost i nekreativnost formule, a što sinonimnost. Istražene su najvažnije odrednice modalne definabilnosti i preneseni neki od rezultata istraživanja u području modalne logike. S istraživanjem definabilnosti su uspješno povezani do sada važni rezultati. Nadalje je kratko prikazan valjan način uvođenja modalne logike iz Booleove logike, uspostavljanje osnova njenog jezika. Konačno, pružan je kratak i sistematičan pregled postojećih rezultata u području modalne logike - definirani su njeni modaliteti i relacije između istih, odnosno svojstva modalnih sustava, što je omogućilo daljnje promatranje modelne definabilnosti klasa i okvira. Određeni su uvjeti lokalne i globalne definabilnosti klasa, te uvjeti definabilnosti okvira. Navedeni su i primjeri definabilnih relacijskih formula. Ovaj je rad bio zamišljen više kao široki, kontekstualizirani pregled nego usko usmjereno istraživanje, zbog čega je mnoštvo interesantnih problema koji su riješeni ili nastoje biti riješeni unutar modalne logike ispušteno iz njegovog sadržaja. Ipak, smatram da je u svojoj zadaći prezentiranja ideja s kojima sam se upoznala bio uspješan.

Summary

Throughout the paragraphs above, I managed to go through some of the most important notions that refer to definability, and display their formal definitions. Other types of definitions have been mentioned – of lesser relevance for this paper, but nonetheless existent and actual. There are many types of definitions in science. In order to discuss the definability of a certain notion, it's been shown that we first must make clear the type of definition we're dealing with, considering that the definability of different structures varies, or should I say operates by different rules. It is preferable to discuss definability in a formal, axiomatic framework, as discussing it outside of this framework is reducible to an opinion, and it often ends up in obscure places. Through various examples in this paper, it is possible to conclude that the application of formal procedures characteristic for logic has shown to be of great benefit while approaching definability .

The paper succeeded in touching upon the results and the meaning of for-

malizing definability in elementary and modal logic, and exploring methods of approach applied in defining notions in science while using formal languages. Methods of defining notions used in natural language have not been disregarded, the main goal of this being the provision of the impression differences between the approaches of formal and natural languages. The ideas in some way relatable to the notion of definability in mathematical logic have been reflected upon – what it means for a definition to be real or nominal, local or global, conditional or explicit, what identity and identifability are, what do eliminability and non-creativity of a formula represent, and what is synonymity. The most important notions of modal definability have been explored and some of the results of research that's been carried out so far have been presented. Important theorems have been introduced as well. Further on it's been briefly presented how modal logic came to be, in terms of Boolean logic, and how the basics of its language have been established. Finally, the short and systematic review of accomplishments in the field of modal logic has been provided in this paper – the modalities and relations between them have been defined, which made it possible to follow the proceeding consideration of the modal definability of classes and frames. The conditions of local and global definability of a class have been specified, as well as the terms of defining frames. Some of the examples of modally definable relations have been mentioned. This paper was conceived as a wide contextualised overview rather than a narrow, focused research, and for this reason certainly many interesting problems considered in modal logic have been ommitted. Still, I find this paper successful in its mission, that being the presentation of ideas I got familiar with through my research.

Literatura

[1] BETH, Evert Willem. *On Padoa's method in the theory of definition*. The Journal of Symbolic Logic, Cambridge University Press, 1953.

[2] BLACKBURN, Patrick; DE RIJKE, Maarten; VENEMA, Yde. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 1905.

[3] FETZER, James Henry. *Definitions and Definability: Philosophical Perspectives*. Springer, 1991.

[4] HINTIKKA, Jaakko. *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Cornell University Press, 1962.

[5] LIBKIN, Leonid. *Elements of Finite Model Theory*. Springer, 2012.

[6] SUPPES, Patrick. *Introduction to Logic*. Stanford, 1957.

[7] QUINE, Willard V. O. "Two Dogmas of Empiricism" U: *Philosophical Review*. 60, 20–43, 1951.

[8] QUINE, Willard V. O. "Reference and Modality", U: *From a Logical Point of View*. Harvard University Press. 139–159, 1953.

[9] TARSKI, Alfred; CORCORAN, John. "What are logical notions?" U: *History and philosophy of logic*. 143 - 154, 1986.

[10] WHITEHEAD, Alfred North, RUSSELL, Bertnard. *Principia Mathematica*. 1910