Sveučilište u Zagrebu

Fakultet hrvatskih studija

Kristina Šekrst

LOGIČKA FORMALIZACIJA EVIDENCIJE U EVIDENCIJALNIM JEZICIMA

DOKTORSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Srećko Kovač

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

Faculty of Croatian Studies

Kristina Šekrst

LOGICAL FORMALIZATION OF EVIDENCE IN EVIDENTIAL LANGUAGES

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

Srećko Kovač, PhD, Full Professor

Zagreb, 2022

Sadržaj

Informacije o mentoru

Srećko Kovač[1] rođen je 1957. godine u Zagrebu. Diplomirao je 1981. na Filozofskom fakultetu u Zagrebu, a magistrirao 1986. godine na pojmu povijesti u Kanta na Fakultetu političkih znanosti u Zagrebu. Od 1989. do 1990. studijski je boravio na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Kölnu istražujući zasnivanje logike i metafizike u Kanta. Doktorirao je 1992. godine na Filozofskom fakultetu u Zagrebu s temom formalne logike u Kanta te njezine rane recepcije u Hrvatskoj.

Od 1986. godine zaposlen je na Institutu za filozofiju u Zagrebu, gdje je znanstvenim savjetnikom u trajnom zvanju. Vodio je znanstvene projekte: *Logika, modalnosti i jezik* (2002. – 2005.), *Logičke strukture i intencionalnost* (2007. – 2012.), *Logika, pojmovi i komunikacija* (2015. – 2018.). Predavao je na Odjelu za filozofiju na Hrvatskim studijima Sveučilišta u Zagrebu od 1992. godine, gdje je 2007. stekao titulu redovitoga profesora u naslovnom zvanju, a također je predavao na Sveučilištu u Osijeku.

Autor je knjiga *Logika kao demonstrirana doktrina: formalna logika u Kanta i njezina najranija recepcija u Hrvatskoj* (1992.), *Priručnik uz Logiku* (2004.), *Logika: za gimnazije* (1. izdanje 1994.), *Logičko-filozofijski ogledi* (2005.) te s Berislavom Žarnićem *Logička pitanja i postupci* (2008.). Objavio je pedesetak članaka u međunarodnim i domaćim časopisima te zbornicima, a redovito izlaže na znanstvenim skupovima u Hrvatskoj i inozemstvu.

[1] Prema: [https://www.ifzg.hr/djelatnici/kovac-zivotopis/] te [https://content.ifzg.hr/ skovac/index.html]. Posljednji pristup: 12. listopada 2019.

Izraditi interdisciplinarnu disertaciju koja objedinjuje i logiku, i filozofiju, i lingvistiku bio bi nemoguć pothvat bez potpore prof. dr. sc. Srećka Kovača. Svojemu mentoru velike erudicije zahvaljujem na prvomu poticaju još u studentskim danima, dugotrajnoj suradnji te na cjelokupnome detaljnome iščitavanju ove disertacije te na svim korisnim savjetima i moralnoj potpori na ovome putu.

Iznimno važnu ulogu tu su odigrali dr. sc. Goran Lojkić i dr. sc. Ivan Restović, prije svega kao prijatelji, a također kao znanstvenici. Hvala im na svim razgovorima i raspravama, što prošlim, a što tek onima koje dolaze, te na iskrenome osloncu. Naš je put počeo zajedničkim studiranjem, a nadam se da će završiti i zajedničkim doprinosima svijetu znanosti. Ne znam s kim bih radije putovala akademskim i neakademskim stazama.

Ovdje je i pokojni doc. dr. sc. Goran Švob, koji je prvi pobudio moju ljubav prema logici i filozofiji jezika dok sam još mislila da je to područje preteško za mene. S lingvističke strane, tu je akademik Ranko Matasović, od kojega sam naučila sve bitno što znam o lingvistici.

Zahvaljujem svim svojim prijateljima, koji su imali razumijevanja za to da bih preskakala druženja kako bih stigla raditi na dokazima te bodrili odabir ovakvoga puta. Posebice hvala Ani Kovačić, Martini Mihalić, doc. dr. sc. Virni Karlić i ostalima koji su trpjeli moj dvostruki život u akademiji i industriji.

Konačno, hvala mojim roditeljima Ljilji i Branku na svoj bezuvjetnoj potpori kroz dva fakulteta i doktorski studij te mojemu bratu Kristijanu što je kroz velik dio mojega ranoga školovanja trpio upaljeno svjetlo do kasnih noćnih sati. Mojemu Šimunu hvala na svoj bezgraničnoj podršci i svemu budućemu strpljivomu slušanju o logici, lingvistici i znanosti uopće. Tema, zasigurno, neće ponestati.

Žena u znanosti, smatram, ima premalo te zahvaljujem svojim uzorima Margaret Hamilton, Jocelyn Bell i Veri Rubin, što su mi svojim postignućima pokazale da je moguće ostvariti neviđene uspjehe u "teškim" disciplinama. Shodno tomu, ovu disertaciju posvećujem svakoj budućoj istraživačici.

Sažetak

Cilj je ovoga rada logički opisati fenomen evidencijalnosti – obvezatnoga i gramatikaliziranoga navođenja opravdanja ili dokazne građe za kakvu tvrdnju te uvidjeti načine primjene takve formalizacije te lingvističke i filozofske spoznaje kao rezultate takve logike. Lingvistička klasifikacija proučava se tipološki te se analizira iz perspektive hijerarhizacije evidencijalne snage. Naime, analiziraju se koji su evidencijalni markeri jači, odnosno koji utječu na formiranje znanja ili istine za kakve tvrdnje u govornika. Takvi se pronalasci povezuju s filozofijom jezika, ali i epistemologijom, na temelju čega se razvija i logička formalizacija.

Naši formalni sustavi motivirani su klasičnim aksiomima logike opravdanja, ali oni su znatno prošireni i izmijenjeni kako bi bolje obuhvatili nijansiranost evidencijalnih jezika. Dodavanjem ili oduzimanjem novih aksioma uočene su i različite epistemološke posljedice, a aksiomi su motivirani primjerima iz prirodnih evidencijalnih jezika, uključujući i način zaključivanja, koji je opravdan inferencijalnim indirektnim evidencijalima.

Prvi formalni sustav – logika $\mathbf{EVL}^{-}$ – opisuje sve evidencijalne jezike, ali zapravo i sve ostale jezike, naime svi jezici imaju neku vrstu epistemičkih modala kojima se može izraziti neka vrsta stava prema tvrdnji ili izvor dokaza za nju, samo što takav fenomen nije gramatikaliziran niti obavezan. Razlikuju se prihvaćena opravdanja i znanjotvorna opravdanja te se stavlja naglasak na govornika kao činitelja, koji neka opravdanja ili dokaze može prihvatiti, ali i ne mora. U toj se logici pokazuje kako su aksiomi epistemične i doksastične logike zapravo teoremi toga sustava te je već logika $\mathbf{EVL}^{-}$ njihov nadskup.

Druga logika – $\mathbf{EVL}$ – opisuje baš striktno evidencijalne jezike te se razlikuju predikati direktnosti i indirektnosti, odnosno svi se evidencijali kao opravdanja dijele na dvije skupine direktnih i indirektnih opravdanja. Prvi se podskup opravdanja – direktna opravdanja – smatra dovoljno pouzdanim da vodi do istine, odnosno do znanja, dok za drugi – indirektna opravdanja – to ne mora uvijek biti slučaj.

Treća logika – $\mathbf{EVL}^{+}$ – gradi se za specifičan evidencijalni jezik kao primjer – u našem slučaju tibetski – kako bi se pokazalo da se formalni sustav može uz male modifikacije primijeniti na bilo koji evidencijalni jezik. Uvodi se predikat hijerarhizacije te pokazuje kako su direktna opravdanja hijerarhijski jača od indirektnih opravdanja, a takvu je predikaciju moguće – uz adekvatnu promjenu predikata u logici $\mathbf{EVL}$ i proširiti ili prilagoditi bilo kojim vrstama evidencijala u bilo kojem evidencijalnom jeziku. Takav se sustav tibet-

skoga jezika uspoređuje s formalnom tibetskom logikom, kako bi se vidjelo da je tradicija budističke epistemologije, logike i matematike pokušala opisati prirodni jezik nekad drukčije od klasične logike, nekad slično njoj, a često nije bila nijansirana dovoljno da objasni fenomen evidencijalnosti.

Završno, za sve formalne sustave daju se prijedlozi moguće primjene – od strojnoga prevođenja pa sve do razumijevanja prirodnoga jezika i, dakako, proširenja logičke tradicije specifičnih jezika i kultura.

Ključne riječi: evidencijalna logika, logika opravdanja, logika dokaza, teorija opravdanja.

Summary

The goal of this dissertation is to logically describe the phenomenon of evidentiality – obligatory and grammaticalized statement of a certain justification or proof for a given statement and to observe the application fields in which such a formalization could be implemented, along with philosophical and linguistic insights as a result of such logic. Linguistic classification is studied typologically and analyzed from an evidential-hierarchy perspective. In other words, we are analyzing which evidential markers are stronger, i.e. which are influencing the formation of knowledge or truth of a certain statement for a certain speaker. Such findings are being connected to philosophy of language, but also epistemology, on the basis of which a logical formalization is being constructed.

Our formal systems are motivated with classical axiomata of justification logic, but these are significantly extended or modified in order to better capture all the nuances of evidential languages. By adding or removing new axiomata, one can notice different epistemological consequences, and our axiomata are motivated by examples from natural evidential languages, including a way of inference, which is justified by inferential indirect evidentials.

The first formal system – logic $\mathbf{EVL}^{-}$ – aims to describe the speaker's perspective in languages with epistemic modalities and in evidential languages. That is, every language has a certain type of epistemic modals that can form a certain type of attitude towards a statement or its proof, only that phenomenon is not grammaticalized nor obligatory. We are differentiating between accepted justifications and knowledge-producing justifications, and we want to emphasize the speaker as an agent, who can accept some justifications or proofs, but s/he does not have to. In this logic, we have shown that epistemic and doxastic logic axiomata are theorems of this system and that this logic is in a way a superset of epistemic and doxastic logics.

The second logic – $\mathbf{EVL}$ – describes strictly evidential languages, and we differentiate between two predicates: direct and indirect, i.e. every evidential as a justification is being classified as either a direct justification or an indirect justification. The first subset of all justifications – direct justifications – is considered sound enough to produce truth and knowledge, and as for indirect justifications – that does not have to be the case.

The third logic – $\mathbf{EVL}^{+}$ – is being built for a specific evidential language as an example – in our case Tibetan – to show that a formal system can be, with small modi-

fications, applied to any evidential language. We are introducing the hierarchy predicate which states that direct justifications are hierarchically stronger than indirect ones, and such predication can be subjected to extension or modification – along with an adequate change of predicates in logic **EVL** – for any type of evidentials in any evidential language. Such a formal system of the Tibetan language is compared to a formal Tibetan logic, to see that the tradition of Buddhist epistemology, logic, and mathematics had tried to describe the natural language somewhat differently than our classical logic, and sometimes similarly to it, but it often was not nuanced enough to explain the phenomenon of evidentiality.

To conclude, for every formal system, a possible suggestion of various applications is given, from machine-aided translation to natural-language understanding, and, of course, the expansion of logical traditions of specific languages and cultures.

Keywords: evidential logic, justification logic, logic of proofs, theory of justification.

Popis pokrata

m.	muški rod
f.	ženski rod
n.	srednji rod
sg.	jednina
pl.	množina
ACC	akuzativ
ANPH	anafora
CAUS	kauzativ (uzrokovati/činiti da tko što čini)
CNTR	kontrastiv (suprotni odnos između dvaju dijelova diskursa)
COMP	komparativ
COMPL	svršeni vid glagola
CONJ	veznik
DECL	deklarativ (indikativni način za deklarativne rečenice)
DET	determinator (govori o određenosti riječi, fraze ili afiksa, najčešće član ili zamjenice)
DEP	zavisni dio/surečenica (kao prefiks ili sufiks)
ERG	ergativ (padež u kojem je subjekt prijelaznoga glagola)
EMPH	emfaza (emfatična riječ ili čestica)
EVID	evidencijal
FUT	futur
GEN	genitiv (često u službi posvojnosti)
IMPF	imperfekt
INCEP	inceptiv (vid koji označava početak radnje)
IRR	irealni načini (konjunktiv, kondicional, optativ, imperativ itd.)
LOC	lokativ
MOD	slaganje s negacijom i evidencijalima u čejenskom
NEG	negacija
OBJ	objekt

PART	čestica
PAS	pasiv
PERF	perfekt ili slična vrsta prošloga vremena
POSS	posesivni marker (oznaka posvojnosti)
PRED	predikat
PRES	prezent
PROG	progresiv (označava (trenutačnu) radnju u tijeku)
REFL	refleksiv (najčešće u kontekstu povratnosti)
REL	relativ (konstrukcije odnosnih rečenica)
SBJV	konjunktiv
SUB	subjekt
TOP	topikalizirani nesubjektni dio rečenice

Predgovor

There is nothing more deceptive than an obvious fact.

— Arthur Conan Doyle, *The Boscombe Valley Mystery*

Ova je disertacija nastala kao pokušaj da sjedinim svoje dvije struke: logičku i filozofsku s lingvističkom. Opći je cilj rada formalnologičkim metodama opisati lingvistički fenomen – kategoriju evidencijalnosti. Obrazovanje o ovoj temi započelo je još na studiju poredbene lingvistike na Filozofskom fakultetu u Zagrebu, gdje sam gotovo sve što znam o lingvistici naučila od akademika Ranka Matasovića, a započela učiti o logici i filozofiji jezika od pokojnoga profesora Gorana Švoba. Taj se put nastavio na kolegijima iz logike na Fakultetu hrvatskih studija, gdje me nastava kod mojega profesora i mentora Srećka Kovača zaintrigirala upućivanjem na brojne neklasične logike kojima se različiti fenomeni mogu formalno bolje opisati no što se to čini klasičnom logikom.

Uvidjevši kako je logika zapravo dijelom matematika, a dijelom filozofija, shvatila sam da je takvo oruđe odgovarajuće za brojne probleme koji su često zanemarivani u opisima jezikoslovnih fenomena. Prvi je dio ovoga pothvata bio pregled kategorije evidencijalnosti – obvezatnoga gramatikaliziranoga navođenja dokazne građe za tvrdnje u raznim jezicima – u mojem diplomskom radu iz logike opravdanja (*Formalizacija, aksiomatizacija i klasifikacija primijenjene logike opravdanja: slučaj evidencijalnosti*, 2014.) i načini interpretacije toga fenomena kroz standardne aksiome takve logike. Takav je početak istraživanja bio motiviran usmenom predajom moga mentora prof. dr. sc. Srećka Kovača, koji me 2013. godine upozorio na Gurevichevo povezivanje opravdanja s evidencijalnim jezicima [82]. Kako je profesor Gurevich istraživao u smjeru evidencijalne autorizacije i nije se bavio logikama opravdanja niti lingvistikom, uvidjela sam kako bi upravo takva kombinacija mogla postati prvom takvom studijom.

Međutim, kroz daljnje istraživanje shvatila sam kako ni logika opravdanja ne opisuje dobro sve lingvističke, filozofskojezične i epistemološke nijanse koje se doista nalaze u takvim jezicima, stoga je bilo potrebno izgraditi svoj formalnologički sustav koji će obuhvatiti sve pragmatičke nijanse prirodnoga jezika s kategorijom evidencijalnosti. Moguće je da se čini kako je takav pothvat nebitan s obzirom na malen broj takvih jezika. Međutim, evidencijalnih jezika ima i više nego indoeuropskih jezika, koji su – premda genetski, a ne tipološki podijeljeni – bili predmet poredbenolingvističkih, filozofskih i logičkih istraživanja kroz stoljeća, dok su ostale genetske porodice i iz tipološke perspektive netipični jezici uglavnom zanemarivani, a to je čest slučaj i u računalnoj obradi te prijevodu. Ova je disertacija pokušaj da se istraživanja prirodnoga jezika orijentiraju i na ne tako tipične prirodne jezike.

Izradu ovoga rada djelomično je poduprla Hrvatska zaklada za znanost projektom *Logika, pojmovi i komunikacija* (IP-2014-09-9378) te Institut za filozofiju u Zagrebu.

Poglavlje 1

Uvod

Zamislimo da svaki iskaz koji proizvedemo mora imati opravdanje, odnosno moramo obavezno specificirati izvor dokazne građe, inače nam ta rečenica uopće ne bi bila gramatična – sugovornici bi mislili da ne znamo govoriti, a moguć bi bio i izgon iz jezične zajednice. Međutim, takvu situaciju ne moramo zamišljati. Premda svi jezici svijeta imaju način da izraze izvor informacije, izvor dokazne građe ili opravdanje za kakvu tvrdnju, postoji tipološka klasa jezika u kojima je to većinom ili potpuno obligatorno. Takvi se jezici nazivaju *evidencijalnim* jezicima, a sama *gramatikalizirana* kategorija pružanja izvora dokazne građe naziva se *evidencijalnošću*.

Odnosno, u takvim jezicima ne možemo reći *Goran sjedi*, *Ivan trči* ili *Šimun stoji*, nego, primjerice, moramo dodati kakav afiks x, y ili z, pri čemu će se evidencijal kao gramatička kategorija najčešće ponašati kao bilo koja druga slična gramatička kategorija u tom jeziku – bit će izražen afiksom, morfemom ili sličnim gramatičkim sredstvima. Primjerice u navedenim primjerima nastavak prezenta jest *-i*, no u takvim bismo jezicima još morali dodati kakav drugi afiks koji će označiti izvor dokazne građe: *Goran sjedix*, *Ivan trčiy* ili *Šimun stojiz*, pri čemu x primjerice znači "vidim", y znači "zaključujem jer i inače trči popodne, a sad je 15 sati", a z "netko mi je rekao".

Obično je filozofija jezika, a tako i logika, okrenuta isključivo indoeuropskim jezicima, što je razumljivo s obzirom na indoeurocentričnu stranu europske kolijevke znanosti. Međutim, isto se događa i u tehničkim granama, gdje se u strojnom prevođenju vrlo dobro barata indoeuropskim jezicima, posebice engleskim, dok su neindoeuropski jezici slabo zastupljeni, premda se radi o oko 5500 drugih, ako uzmemo u obzir standardni lingvistički konsenzus da na svijetu ima oko 6000 jezika. U tom su aspektu indoeuropski jezici tek manjina. Među indoeuropskim jezicima nema pravih evidencijalnih jezika te potonjih s tipološke strane ima otprilike barem koliko i indoeuropskih jezika, a opet su gotovo pa zapostavljeni u većini formalnih proučavanja.

Problem takvih jezika leži i u ljudskom prevođenju te strojnom prevođenju. Ista rečenica može imati isti prijevod, a drukčiju pozadinsku konotaciju izvora dokazne građe. Primjerice, u jeziku tuyuca[2] takva je uporaba striktno obligatorna [28, str. 257]:

(1) díiga apé-**wi**
igrati.PERF nogomet
"Igrao je nogomet [vidjela sam to]."

(2) díiga apé-**ti**
igrati.PERF nogomet
"Igrao je nogomet [čula sam to, ali nisam ga vidjela]."

(3) díiga apé-**yi**
igrati.PERF nogomet
"Igrao je nogomet [vidjela sam dokaze za to, npr. otiske stopala na travi]."

(4) díiga apé-**yigɨ**
igrati.PERF nogomet
"Igrao je nogomet [netko mi je rekao]."

(5) díiga apé-**hĩyi**
igrati.PERF nogomet
"Igrao je nogomet [pretpostavljam na temelju grupnoga ili općega znanja o njemu]."

U tim primjerima različitim sufiksom označava se različita vrsta evidencijala; vizualna, nevizualna senzorna, zaključivanje iz senzorne građe, informacija iz druge ruke i pretpostavka. Neki jezici, kao tuyuca, imaju striktno obligatornu evidencijalnost, a neki većinom te se čini da je evidencijalnost stvar stupnja.

Proučavajući različite modalne logike, uočili smo kako logika opravdanja – razvijena iz logike dokaza – može poslužiti kao alat kojim bismo mogli opisati evidencijalne jezike i pritom naučiti nešto novo o specificiranju dokaza za tvrdnje, o samim dokazima i njihovoj

[2] Tuyuca je jezik porodice tukano, a govori se u Kolumbiji i Brazilu te ima oko 1000 govornika [1].

hijerarhiji te o načinu zaključivanja. Glavni je cilj rada uspostaviti matematičko-logički sustav opisivanja evidencijalnih jezika, zajedno sa "slabijom" inačicom, koja vrijedi za sve jezike koji specificiraju dokaznu građu, i s "jačom" inačicom, koja vrijedi za neki specifični evidencijalni jezik – u našem slučaju tibetski – a može se modificirati za bilo koji drugi evidencijalni jezik.

Uspostavom takvoga sustava ostvaruju se i sekundarni ciljevi. Prvo, uočava se koji su nam aksiomi potrebni da bismo cjelovito opisali sustave i takvi se aksiomi dovode u vezu s epistemološkim teorijama u pozadini opravdanja. Drugo, pokazuje se koje su epistemološke i logičke posljedice sustava ako izostavimo kakav aksiom i što takav sustav može ili ne može izreći. Treće, takav formalni okvir ide ukorak s lingvističkim istraživanjima hijerarhizacije evidencijala, gdje i mi predlažemo svoju opću hijerarhiju evidencijalne snage u svim evidencijalnim jezicima, u području gdje su uglavnom rađena specifična istraživanja. Četvrto, takav formalni okvir može se iskoristiti za lakše strojno prevođenje jezika, znajući da ako za istu tvrdnju imamo više različitih evidencijala, postoji određena hijerarhija i neki su bitniji od drugih, što je relevantno i za prijevodne konotacije. Peto, na specifičnom evidencijalnom jeziku – tibetskom – pokazat će se koliko je logika koja opisuje prirodni evidencijalni jezik kao što je tibetski slična logičkoj, filozofskoj, epistemološkoj i matematičkoj tradiciji koja je slijedila pravila zaključivanja u tibetskom ili pak različita od njih.

U drugom poglavlju – *Epistemološka i logička motivacija logike opravdanja* – govori se o logici opravdanja te njezinoj povijesti. Prvenstveno motivaciju vuče iz intuicionističke tradicije istinitosti kao dokažljivosti, na temelju čega je nastala i logika dokaza. Logika dokaza prejaka je da bi opisala prirodni jezik, prvenstveno zato što posljedica imanja evidencije za tvrdnju ne znači da je ta tvrdnja istinita, što u matematici jest slučaj. Međutim, detaljnim usporedbama ni sama logika opravdanja ne može dobro izraziti nijanse evidencijalnih jezika, stoga su neki njezini aksiomi uzeti kao temelj i modificirani za razvoj naših sustava. Naši će sustavi biti osnovani na modalnoj logici prvoga reda, prvenstveno zato što smatramo da se odnos između različitih vrsta evidencijala i njihove međusobne hijerarhije najbolje može opisati različitim predikatima.

No, kako bismo najbolje došli do same formalizacije opravdanja, nužno je vidjeti i drugu tradiciju koja ju je motivirala, a to je upravo epistemološka tradicija, gdje su internalističke i eksternalističke teorije opravdanja jedan od glavnih izvora rasprava u modernoj epistemologiji. Smatramo da je nužno donijeti i epistemološki opis teorija opravdanja kako bi se bolje razumio ne samo njihov logički status nego i lingvistički. Premda se lingvistička tipologija bavi i kategorijama evidencijala i epistemičkih modala, rijetko se dovode u vezu s filozofskim pozadinama koje su vrlo detaljno i formalno opisale izvore dokazne građe i pouzdane procese njihova proizvođenja.

U trećem poglavlju – *Logike opravdanja* – opisuju se upravo logike opravdanja, nakon što smo detaljno pokazali njihov razvoj od Gödela do logike dokaza. Glavni su istraživači ovoga područja zasigurno Sergei Artemov i Melvin Fitting, no u posljednje vrijeme logika opravdanja privlači i veći broj novih stručnjaka, prvenstveno u polju realizacije i povezivanja s teorijom računske složenosti.[3] Pokušali smo obuhvatiti svu relevantnu literaturu logike opravdanja, a u vrijeme završavanja ovoga rada izašla je knjiga Sergeia Artemova i Melvina Fittinga [22], koja sadržava glavne radove u logici opravdanja. Međutim, kako su glavni radovi većinom samo stilistički modificirani, smatrali smo relevantnijim citirati upravo izvorne radove, a ne sabrani kompendij logike opravdanja. U ovom poglavlju spominjemo i sustave logike opravdanja prvoga reda, međutim oni se nastavljaju na logiku dokaza prvoga reda i signifikantno se razlikuju od naših sustava.

U četvrtom poglavlju – *Evidencijalnost i evidencijalni jezici* – prvo krećemo od razlike evidencijalnosti i epistemičke modalnosti. Naime, svi jezici posjeduju neki način izražavanja dokazne građe. Spomenuli smo kako nam se čini da je evidencijalnost stvar stupnja: na jednom kraju ležali bi klasični jezici s epistemičkom modalnošću i izražavanjem stava prema kakvoj tvrdnji, a na drugom kraju striktno obligatorni evidencijalni jezici s obaveznim navođenjem izvora dokazne građe za svaku tvrdnju. Epistemička modalnost razgraničena je od evidencijalnosti prvenstveno na temelju svoje neobvezatnosti u rečenici, ali razlikuju se i kategorijalno. Naime, epistemička modalnost vrednuje evidenciju i na temelju toga vrednovanja pridružuje određenu mjeru pouzdanosti u govornikov iskaz. S druge s trane evidencijalnost tvrdi da postoji dokaz, evidencija, opravdanje za govornikov iskaz, ali odbija interpretirati tu evidenciju u smislu zauzimanja vrednovanja tvrdnje ili kakvoga jakoga stava. U istom poglavlju rabimo seminalnu studiju Alexandre Aikhenvald [5], koja je minuciozno proučila evidencijalne jezike te donijela najtočniju poznatu klasifikaciju od

[3] Teorija računske složenosti ili teorija komputacijske kompleksnosti bavi se klasificiranjem računskih problema u odnosu na njihovu inherentnu složenost. Prvenstveno se gleda koliko različiti algoritmi i metode rješavanja zauzimaju prostora ili vremena, a problemi su teški ako zauzimaju veliku količinu resursa. U računskoj složenosti posebice su relevantni problemi odlučljivosti, a dvije su glavne klase problema: **P** i **NP**. **P** je temeljna klasa složenosti koja sadržava sve probleme odlučljivosti koji se mogu riješiti pomoću determinističkoga Turingova stroja koristeći se polinomnim vremenom komputacije. **NP** je klasa složenosti koja sadržava probleme odlučljivosti koji su rješivi u polinomnom vremenu nedeterminističkim Turingovim strojem, odnosno imaju dokaze koji su provjerljivi u polinomnom vremenu. Danas je neriješen problem u računalnoj znanosti mogu li se **NP**-problemi svesti na **P**-probleme ili ne.

dvočlanih preko višečlanih sustava. Smatramo da je ta klasifikacija kombinirana s našim logičkim alatom ujedno i put za buduća istraživanja specifičnih evidencijalnih jezika.

U istom poglavlju bavimo se i time kad je tvrdnja doista istinita u evidencijalnim jezicima i kako se u njima zaključuje, odnosno, uspoređujemo vezu između evidencijalnosti i propozicijskih stavova. Uspoređujemo nekoliko specifičnih opisa hijerarhije evidencijala u različitim jezicima te smo na temelju lingvističkih istraživanja pokušali odrediti opću hijerarhiju evidencijala u evidencijalnim jezicima, koja će nam poopćeno služiti i u evidencijalnoj logici. Smatramo da je hijerarhizacija opravdanja relevantna ne samo za formalni opis nego i za strojno prevođenje takvih jezika, jer s jedne strane sva opravdanja nisu jednako epistemološki i lingvistički *vrijedna* i, s druge strane, u slučaju više različitih opravdanja za istu tvrdnju možemo birati ono koje je najpouzdanije. S te strane direktni evidencijali, odnosno senzorna opravdanja, smatrat će se eksternalistički proizvedena pouzdanim procesom.

U petom poglavlju – *Evidencijalna logika* – donosimo tri evidencijalne logike. Logika $\mathbf{EVL}^-$ nastavlja se na Artemovljevu podjelu prihvaćenih opravdanja i opravdanja koja proizvode znanje [20, 19], odnosno znanjotvornih opravdanja. Smatramo da je takva vrsta modela vrlo prikladna za opis evidencijalnih jezika. Međutim, kako bismo bolje izrazili nijanse opravdanja iskaza u evidencijalnim jezicima, neki su aksiomi logike opravdanja modificirani upravo za operatore prihvaćenosti i proizvodnje znanja, a izbacili smo faktivnost za općenita opravdanja i prihvaćena opravdanja: to što govornik ima ili prihvaća neko opravdanje za neku tvrdnju, ne znači da je ona istinita, što je problem jačine zbog kojega i logika dokaza nije adekvatna za opis opravdanja u prirodnom jeziku, koji se ipak ne ponaša striktno kao formalni matematički sustav. U ovom sustavu pokazujemo kako se iz aksioma mogu izvesti kao teoremi i klasični modalni aksiomi epistemičke logike i doksastične logike. Uspostavljamo usku vezu između znanja, vjerovanja i opravdanja te vjerovanje definiramo uz pomoć postojanja opravdanja koje govornik prihvaća, a znanje uz dodatni uvjet da je to opravdanje u skupu znanjotvornih opravdanja. Na taj način pokazujemo kako se iz logike neke vrste opravdanja mogu doista izvesti i logike znanja i logike vjerovanja. Takva je logika primjenjiva na sve evidencijalne jezike, ali moguće i na jezike s epistemičkim modalnostima u slučaju kad se doista rabe kao neka vrsta neobvezatnih opravdanja. Logika $\mathbf{EVL}^-$ očekivano je pouzdana i potpuna.

Druga evidencijalna logika $\mathbf{EVL}$ odnosi se na proširenje upravo na evidencijalne jezike gdje je evidencijalnost obligatorna gramatička kategorija. Naime, nastavljajući se na logiku $\mathbf{EVL}^-$ proširujemo je predikatima direktnosti i indirektnosti da možemo govoriti o samim opravdavajućim oznakama (opravdanje za kakvu tvrdnju, odnosno formulu). Na neki ih način ontološki dijelimo na dvije kategorije – direktna i indirektna opravdanja – do kojih smo došli na temelju proučavanja sistematske klasifikacije evidencijala u prethodnom poglavlju. Smatramo da je takva općenita podjela dovoljna da obuhvati gotovo sve, ako ne i sve, evidencijalne jezike jer se sve opreke doista mogu analizirati iz sfere opreke senzornoga viđenja i nesenzornoga viđenja, bilo da je jedno od toga obilježeno ili ne. Predikati direktnosti u idealnom slučaju vežu se uz znanje, pri čemu je vrlo uska veza između vida i znanja, što je česta etimološka veza u jezicima svijeta, a posebice i u indoeuropskim jezicima. Na temelju toga definirali smo da direktna opravdanja jesu u skupu znanjotvornih opravdanja i jesu ona koja govornik prihvaća te tako vode do istine, odnosno govornik, imajući kakvo direktno opravdanje, doista zna neku tvrdnju. Standardne su iznimke poput halucinacija ili priviđenja protuprimjer, no težimo opisati idealnu jezičnu i pragmatičnu uporabu u kojoj opet naglasak stavljamo na pouzdani proces proizvodnje (čime se ponajviše bave eksternalističke teorije opravdanja).

Treća evidencijalna logika $\mathbf{EVL}^+$ ujedno donosi hijerarhizaciju opravdanja u tibetskom jeziku, koji razlikuje tri vrste evidencijala: direktni, indirektni i egoforni. Egoforne evidencijale smatramo bliskima opravdanjima za aksiome, odnosno u našem slučaju konstantama, s obzirom na to da se ne radi niti o direktnim niti o indirektnim opravdanjima nego o nekoj kombinaciji obojega ili direktnoj intuiciji, ovisno o različitim interpretacijama istraživača evidencijalnosti u tibetskom. U situacijama kad imamo i direktno i indirektno opravdanje za kakvu tvrdnju, direktno će opravdanje uvijek biti hijerarhijski više, odnosno važnije, od indirektnoga opravdanja. Takav se odnos, izražen pomoću predikata hijerarhizacije, može potom lako modificirati za sve višečlane evidencijalne sustave, uz adekvatnu modifikaciju aksioma i predikata logike $\mathbf{EVL}$. Naime, ako bismo uzeli peteročlani evidencijalni sustav, mogli bismo umjesto predikata direktnosti i indirektnosti kao poopćenih kategorija donijeti pet novih predikata, a u logici $\mathbf{EVL}^+$ i peteromjesni hijerarhijski predikat. Na taj se način obje logike mogu lako prilagoditi za bilo koji specifični evidencijalni jezik, paralelno s lingvističkim proučavanjima hijerarhizacije u takvim jezicima.

U šestom poglavlju – *Rezultati formalizacije* — promatramo kakve filozofske posljedice imamo na temelju logike kao oruđa. Naša je glavna teza bila formalizacijom vidjeti uspostavljaju li se novi odnosi između znanja, vjerovanja i opravdanja te kakva je doista hijerarhija različitih evidencijala kao opravdanja. Pokazano je kako se preko opravdanja formalno mogu izraziti i pojmovi znanja, i vjerovanja, i istine te nam se čini kako bi s te strane opravdanje ontološki moglo biti shvaćeno kao primarni pojam. S druge strane, da bismo mogli izraziti epistemičke i doksastične aksiome kao teoreme sustava, moramo prihvatiti i jednu internalističku posljedicu, i to kod problema pozitivne introspekcije. Da bi sustav funkcionirao, moramo odrediti sljedeće: ako govornik prihvaća opravdanje za neku tvrdnju, onda on doista smatra da je to znanjotvorno opravdanje, premda to, dakako, ne mora biti slučaj. Smatramo da je taj uvjet intuitivan uz koncept racionalnoga činitelja. No premda nam se sve navedene logike čine u velikoj mjeri bazirane na eksternalističkim teorijama proizvodnje znanja i vjerovanja pouzdanim procesima, moguće je da govornik ima opravdanje npr. iz druge ruke za neku tvrdnju, da zna tu tvrdnju, a da pritom doista ne zna da zna tu tvrdnju.

U istom poglavlju, s obzirom na to da smo posljednju logiku $\mathbf{EVL}^+$ upravo razvili na temelju tibetskoga sustava evidencijala, uspoređujemo logiku tibetskoga jezika s tibetskom logikom. Tibetska logika razvila se na tradiciji budističko logičko-epistemološke škole, koja opet uzima znatan broj elemenata iz indijske i hinduističke filozofije te logike. Uspoređujemo kako različiti načini stjecanja znanja (*pramāṇa*) odgovaraju različitim opravdanjima, odnosno evidencijalima. Šest glavnih načina stjecanja znanja (percepcija, zaključivanje, usporedba, postuliranje, nekognicija, verbalni autoritet) analogni su evidencijalima (direktni senzorni, inferencijalni, reportativni) i njihovim podvrstama te se uspoređuju razlike i sličnosti s našim logičkim sustavima kako bi se doista vidjelo koliko tradicija, koja logikom pokušava opisati prirodni jezik, na temelju formalne i filozofske pozadine, dobro ili neadekvatno opisuje prirodni jezik kao što je tibetski. Uočavamo kako se mnoge doktrine mogu povezati s našim logičkim sustavima, ali i kako tibetska logička tradicija nerijetko neadekvatno opisuje opravdanja, koja ipak imaju visok epistemički i logički status u evidencijalnim jezicima kao što je tibetski.

Zaključno dajemo prijedloge mogućih budućih istraživanja, posebice u smjeru matematičko-logičkoga opisa relevantnoga za strojno prevođenje takvih jezika, ali i način na koji se evidencijalna logika može iskoristiti kao oruđe za opis i drugih evidencijalnih jezika, kako bi i lingvistima, i filozofima, i logičarima, i računarnim znanstvenicima pružila uvid u zaključivanje i valjane rečenice u takvim jezicima.

Poglavlje 2

Epistemološka i logička motivacija logike opravdanja

2.1 Epistemološka pozadina logike opravdanja

Logike opravdanja jesu logički sustavi koji aksiomatiziraju opravdanje, odnosno formalno $t{:}X$ stoji za „X je opravdan razlogom t". Logike opravdanja razvile su se na logikama dokaza, koje su se bavile dokazima za određenje tvrdnje, pri čemu se – analogno intuicionističkoj tradiciji – zapravo radilo o matematičkim dokazima. Međutim, pojam opravdanja mnogo je širi, pogotovo ako se promotri iz različitih filozofskih tradicija, posebice u samoj epistemologiji. S jedne strane motivacija za logiku opravdanja dolazi iz intuicionizma (shodno tomu kasnije i iz logike dokažljivosti, epistemične logike i logike dokaza), koji će tvrdnju smatrati istinitom ako postoji dokaz za nju, a s druge pak strane iz epistemoloških teorija opravdanja, koje razmatraju na koje načine opravdanja za vjerovanja utječu na formiranje znanja i koliko su pouzdana i jaka u tom procesu.

U epistemologiji se teorija opravdanja bavi opravdanjima za propozicije i vjerovanja. Platon je u *Teetetu* [126, 201c-210b] donio definiciju znanja kao opravdanoga istinitoga vjerovanja. Sokrat tvrdi kako je istinito mišljenje općenito nedovoljno za znanje, primjerice ako se odvjetnik koristi sofistikom da bi u porote inducirao vjerovanje koje se ispostavi istinitim, to vjerovanje ipak nije dovoljno dobro utemeljeno da bi konstituiralo znanje. Takva trodijelna analiza tvrdi da S zna da p akko 1) p, odnosno p je istinit 2)

S vjeruje da p 3) S ima opravdanje vjerovati da p. Početkom suvremene analize znanja smatra se [75, str. 13], gdje Gettier[4] opovrgava trodijelnu analizu znanja kao opravdanoga istinitoga vjerovanja te pokazuje primjere gdje činitelj opravdano i istinito vjeruje u neki sud, ali to opet ne konstituira znanje.[5] Taj je gettierovski problem iznjedrio suvremene teorije opravdanja, koje pokušavaju ili dodati novi uvjet ili promotriti te probleme iz drugoga kuta, primjerice da se radi o slabom opravdanju ili da se moraju isključiti neistiniti elementi iz opravdanja [40].

Činitelj može vjerovati u što, a da njegovo vjerovanje nije znanje, primjerice da je puko nagađanje, a da je posve slučajno istinito. Da bi osoba koja vjeruje u istinit sud imala znanje, ona mora imati i opravdanje za to vjerovanje, odnosno dobre razloge temeljene na odgovarajućoj dokaznoj građi [40, str. 11]. Pritom su izvori vjerovanja – zamjećivanje, pamćenje, introspekcija, intuicija i svjedočanstvo – ujedno i osnove opravdanja različitih vjerovanja (percepcijskih, memorijskih, introcepcijskih, intuicijskih i testimonijskih). Za epistemologe je relevantno i epistemičko opravdanje, odnosno opravdanje za vjerovanje koje se temelji na epistemičkim razlozima ili dokaznoj građi, ono vodi znanju ili po svojoj strukturi može dovesti do njega. No, ako tko ima opravdanje za neko vjerovanje, to ne znači da je njegovo vjerovanje opravdano, naime, opravdanje za vjerovanje epistemički je potencijal, a opravdanost vjerovanja taj potencijal *in actu* [40, ibid.]. Moderne epistemološke teorije opravdanja dijele se na internalističke i eksternalističke teorije, s time da postoje i pozicije koje preuzimaju segmente obiju strana.

Internalizam u teoriji opravdanja jest teorija kojom se tvrdi da su elementi koji čine opravdanje spoznajno dostupni vjerovatelju, odnosno nalaze se unutar njegove spoznajne perspektive te ih je vjerovatelj svjestan ili ih može postati svjestan [40, str. 30]. Epistemički regres rješava se različitim teorijama ovisno o tom gdje se regres zaustavlja – u opravdanim ili neopravdanim vjerovanjima ili se pak raspršava u mreži različitih vjerovanja.

---

[4] Slični su primjeri bili poznati ranije i kod Meinonga, Russella, skolastika te, zanimljivo, budističkoga filozofa 8. stoljeća Dharmottare [92].

[5] Poznati je primjer Jonesa i Smitha, koji se natječu za posao. Smith ima dokaznu građu za konjunkciju premisa 1) *Jones je osoba koja će dobiti posao* (rekao mu je direktor) i 2) *Jones ima deset novčića u svojem džepu* (vidio ih je u džepovima) te može zaključiti 3) *Osoba koja će dobiti posao ima deset novčića u svojem džepu.* Međutim Smith dobije posao, ali također – ne znajući – ima deset novčića u svojem džepu, no Smith **ne zna** 3).

Fundacionalizam[6] je teorija kojom se tvrdi da postoje vjerovanja na kojima se epistemički regres zaustavlja te su ona opravdana neinferencijski – bez zaključivanja iz kakvih drugih vjerovanja – a sam model opravdanja nalikuje piramidi, koja se gradi na temeljnim vjerovanjima, koja su osnova inferencijskoga opravdanja za ostala netemeljna vjerovanja. Samim time opravdanje je utemeljenje ostalim vjerovanjima, a temeljna vjerovanja opravdavaju se zamjedbom i opažajnim stanjima lišenim vjerovanjima [40, str. 31]. Neinferencijski su opravdana i vjerovanja o sebeprikazujućim stanjima – kao što su mišljenje i osjećanje – te vjerovanja koja su pouzdano proizvedena zamjećivanjem, opažanjem, pamćenjem ili valjanim zaključivanjem, odnosno nekim mehanizmom koji teži proizvođenju istinitih vjerovanja [40, ibid.].

Koherentizam[7] je teorija kojom se polazi od teze da je sve opravdanje inferencijsko te da nema neposrednoga, odnosno neinferencijskoga opravdanja, niti neposredno neinferencijski opravdanih vjerovanja. Opravdanje kakvoga vjerovanja temeljeno je na njegovoj koherenciji s ostalim vjerovanjima unutar obuhvatnoga skupa vjerovanja te je neko vjerovanje opravdano u onoj mjeri u kojoj ga podržavaju druga vjerovanja i u mjeri u kojoj je uklopljeno u širi sklop ostalih vjerovanja, tako da se koherentnost skupa vjerovanja njime povećava, a ne smanjuje [40, str. 34].

Kontekstualizam[8] jest teorija kojom se naglašava uloga epistemičkoga konteksta u opravdanju vjerovanja. Od fundacionalizma kontekstualizam preuzima ideju o temeljnim vjerovanjima, a od koherentizma ideju uzajamne potpore vjerovanja, no temeljna vjerovanja nisu opravdana fundacionalistički ili koherentistički nego svojim mjestom u kontekstu

---

6 Tipični su predstavnici fundacionalizma Aristotel i René Descartes, potom John Locke, David Hume, ali i moderni epistemolozi kao Rudolf Carnap, William Alston, Alfred Ayer, Roderick Chisholm i drugi ([40, str. 31]. Primjerice, za Aristotela su to temeljna vjerovanja koja nisu podržana kakvim drugim vjerovanjima, ali podržavaju druga vjerovanja [9, 1.3:5-23]. Descartes traži jasna i odjelita vjerovanja koja nisu pogrešiva, nisu i ne mogu se ispravljati [50, Med. 3, 7:35]. Locke i empiristi temelj traže u iskustvu, a neki moderni filozofi poput Moritza Schlicka [138] vide znanstveno znanje kao piramidu (nasuprot, primjerice, Ottu Neurathu [118], koji pak smatra da je znanstvena spoznaja poput splavi koja je kohezivna i stalno se nadograđuje).

7 Predstavnici koherentizma obično su logički pozitivisti poput spomenutoga Otta Neuratha [118] i Carla Hempela [85], a među najistaknutijim koherentistima smatraju se [40, str. 34] Willard Van Orman Quine (npr. [129, 128]) i Donald Davidson [41], potom, primjerice, Wilfrid Sellars [139], Keith Lehrer [105] i Laurence Bonjour [31].

8 Kontekstualističku su interpretaciju zagovarali, primjerice [40, str. 37], Ludwig Wittgenstein [164], David Annis [8] te Keith DeRose [49].

rasprave ako su nesporna za relevantnu skupinu prosuditelja [40, str. 37]. Konačno, **infinitizam** u pogledu lanca opravdanja zagovara ponajviše Peter Klein [96].[9]

Eksternalizam[10] u teoriji opravdanja pretpostavlja da su naša vjerovanja opravdana prvenstveno zahvaljujući vanjskim čimbenicima, koji nisu nužno mentalno ili spoznajno dostupni vjerovatelju. Vanjski čimbenici nalaze se u prirodnom ili društvenom okolišu ili u neurofizološkim procesima koji proizvode vjerovanja, a objektivno jamče istinitost ili veliku vjerojatnost istinitosti vjerovanja, a shodno tomu opisivi su i istraživi znanstvenim metodama [40, str. 38]. Eksterno opravdanje primarno se sastoji od fizičkih veza između činjenice u koju se vjeruje i samoga vjerovanja, a ta veza ukazuje na istinitost toga vjerovanja.

Tipična je eksternalistička teorija **reliabilizam**,[11] teorija kojom se tvrdi da je opravdani status vjerovanja funkcija pouzdanosti psiholoških i neurofizioloških procesa koji proizvode to vjerovanje. Pojam opravdanja često se reinterpretira kao pouzdanost procesa koji proizvodi vjerovanje, odnosno pouzdanost kojom vjerovanje ukazuje na istinitost suda te postoji jača veza između vjerovanja i istinitosti njime nego kroz interno opravdanje [40, str. 39].

Teorije jamstva, prvenstveno u djelu Alana Plantinge [125], odbacuju opravdanje i donose jamstvo lišeno deontoloških i internalističkih elemenata te je jamstvo proizvedeno ispravnom funkcijom vjerovatelja (u odnosu na spoznajni okoliš) te planom dizajna koji je uspješan.

Teorije epistemičkih kreposti[12] ističu važnost za epistemičkom nepokudnošću vjerovatelja, pri čemu vjerovatelj ima odgovornost u procesu proizvodnje vjerovanja – primje-

9 U novije ga vrijeme brane Jeremy Fantl [57] i Scott Aikin [7] smatrajući kako postoji potencijalno beskonačan lanac vjerovanja na temelju kojih je neko vjerovanje opravdano.

10 Uz reliabilizam i teorije jamstva te teorije epistemičkih kreposti postoje i razne socijalne eksternalističke teorije, koje ističu eksternalnost opravdanja koje je društveno uvjetovano.

11 Najpoznatiji je predstavnik Goldman, koji svoju reliabilističku teoriju donosi u [79] i [80] – prvo na temelju kauzalne teorije znanja, a potom kao historijski reliabilizam, kojim opravdanost vjerovanja određuje terminima povijesti njegova proizvođenja. Vjerovanje je opravdano ako je proizvedeno pouzdanim procesom – primjerice zamjećivanjem, pamćenjem ili zaključivanjem – no reliabilizam i dalje pati od problema općenitosti, odnosno određivanje relevantnoga procesa koji oprimjeruje neki proces proizvodnje vjerovanja.

12 Nekih od relevantnih teoretičara epistemičke kreposti jesu Ernest Sosa [144] te Linda Zagzebski [166].

rice sposobnost vida ili sluha – te se analiza premješta s kategorijskih svojstava vjerovanja na urođena ili stečena dispozicijska svojstva vjerovatelja [40, str. 42].

Osim podjele na internalističke i eksternalističke teorije opravdanja, samo opravdanje može se gledati i kao deontološko ili nedeontološko. **Deontološko opravdanje** definirano je time da S ima opravdanje vjerovati da p akko S vjeruje da p, a nije slučaj da je S obavezan suzdržati se od vjerovanja da p. Takvo deontološko razumijevanje pojma opravdanja često je kao u Descartesa ili Lockea, no danas u epistemologiji uglavnom prevladava tumačenje opravdanja kao **nedeontološkoga opravdanja**, pri čemu S ima opravdanje vjerovati da p akko S vjeruje da p na temelju koji daje valjanu probabilifikaciju. Valjana probabilifikacija (*proper probabilification*) u užem smislu znači da istinito vjerovanje nije samo istinito zbog slučajnosti [145].

Sve navedene teorije pretpostavljaju da je opravdanje nužan uvjet za znanje, no ostaje za raspravu na što je točno samo opravdanje usmjereno pri tvorbi znanja, pri čemu je često gledište da se opravdanje odnosi na istinitost suda, odnosno povećava vjerojatnost da je taj sud istinit. Primjerice u BonJour [31, str. 5] tvrdi se da kad epistemičko opravdanje ne bi vodilo istini, onda bi bilo irelevantno za glavni kognitivni cilj teorije i bilo bi dvojbene vrijednosti. Pri takvom usmjerenju cilj je opravdanja imati točan i sveobuhvatan sustav vjerovanja [160].

S druge pak strane, ako opravdanje ne pridonosi istini, čini se da pridonosi samo neepistemičkim ciljevima (koji onda, shodno tomu, ne konstituiraju znanje). Čini se da bi, kad bi tko bio svjestan svojih strategija formiranja vjerovanja koja vode istini, i dalje ne bi mogao rabiti te strategije bez drugih kognitivnih ciljeva, odnosno intelektualnih vrlina, o čemu će posebno raspravljati spomenuti teoretičari epistemičkih kreposti. Suprotno tomu da opravdanje teži istini jest gledište Sticha [146], koji odbacuje takvo polazište ističući kako i među stručnjacima postoje neslaganja oko toga što smatra opravdanjem, a kad se uzmu u obzir brojni protuprimjeri i pogreške teorija opravdanja, nerazumno je smatrati da naša vjerovanja prate istinu. Stich drži da je opravdanje uspješno vjerovanje u praksi i stavlja naglasak na pragmatiku.

Williamson [163, str. 9] pak donosi definiciju opravdanja kao statusa koje znanje može dodijeliti vjerovanjima koja izgledaju dobro u tom svjetlu, a da sama ne pridonose znanju. Za Williamsa je znanje osnovno faktivno stanje uma, ali premda smatra da je znanje "osjetljivo" na opravdanje, to ne znači da mora postojati opravdanje da bismo imali znanje: naime znanje je ono što opravdava, a ne što je opravdano. Samo ono što je znano ili što se računa kao dokaz može se rabiti kao opravdanje: činitelj S može opravdati propoziciju p akko je ono što opravdava p znano [163, str. 9].

Evidencijalizam je teorija čija je glavna postavka da je vjerovatelj opravdan vjerovati u propoziciju ako i samo ako ima dokaz koji podržava njegovo vjerovanje. Feldman i Connee [58] brane evidencijalizam kao tezu o opravdajnom statusu svih doksastičnih stavova: vjerovanja, nevjerovanja i susprezanja prosudbe te tvrde kako je doksastični stav d prema propoziciji p opravdan u vrijeme t ako i samo ako vjerovateljeva evidencija u t podržava stav d prema p. Različite druge filozofske pozicije (npr. internalizam i eksternalizam) mogu se kombinirati s evidencijalizmom te analizirati narav samih opravdanja.

Na temelju svih ovih rasprava opravdanje je našlo mjesto i u logici. Naime, kako se vidi u Artemova [13, str. 1059], premda je opravdanje imalo najveću pažnju u epistemologiji, nije imalo svoju formalnu reprezentaciju. Na temelju logike dokaza i njezine tradicije razvit će se i logika opravdanja, na čijim će se temeljima izgraditi i glavni sustav ove disertacije.

2.2 Formalna pozadina logike opravdanja

Logika dokažljivosti i intuicionizam

Prema Brouweru, istina u matematici – intuicionističkoj matematici – znači postojanje dokaza [35, str. 114], [152]. Kako bi se takva ideja formalizirala, već Heyting u [87] donosi aksiomatizaciju intuicionističke iskazne logike, a potom se tomu pridružuje i semantika, tzv. BHK-semantika, koju su neovisno razvili Heyting [88] i Kolmogorov [97]. U BHK-tumačenju značenje iskaza P dano je objašnjavajući što konstituira dokaz za P ([153, str. 11]). Kratki je nacrt takve semantike sljedeći:

- dokaz za $P \wedge Q$ jest par $\langle p, q \rangle$, gdje je p dokaz za P, a q dokaz za Q
- dokaz za $P \vee Q$ jest par $\langle p, q \rangle$, gdje je p 0 i p je dokaz za P ili q je 1 i q je dokaz za Q
- dokaz za $P \rightarrow Q$ jest funkcija f koja preinačava dokaz za P u dokaz za Q
- kontradikcija $\perp$ nema dokaza, dokaz za $\neg p$ jest konstrukcija koja preinačava bilo koji dokaz za P u dokaz za $\perp$.

Gödel [73] donosi prvu formalizaciju BHK-semantike. Gödel želi uspostaviti konstruktivniju inačicu dokažljivosti u smislu da umjesto Bp[13] – "postoji dokaz za p" – predlaže aBp, odnosno "a dokazuje p".[14] Gödel se koristi modalnom logikom $\mathbf{S4}$ kako bi pokazao svojstva dokažljivosti u matematici te rabi sljedeće aksiome i pravilo necesitacije, prikazane kao u standardnoj modalnoj logici:

- $\Box F \rightarrow F$
- $\Box(F \rightarrow G) \rightarrow (\Box F \rightarrow \Box G)$
- $\Box F \rightarrow \Box\Box F$
- $\vdash F \Rightarrow \vdash \Box F$ (necesitacija).

Gödel pokazuje kako se intuicionistička formula može prevesti u klasični modalni jezik, motiviran time da je u intuicionizmu istina svedena na dokažljivost: $\mathbf{IPC} \vdash F \Rightarrow \mathbf{S4} \vdash$ prijevod od F.[15] Takav prijevod $t(F)$ dobiva se prefigiranjem svake potformule F modalitetom dokažljivosti $\Box$, odnosno kad se klasične procedure određivanja klasične istinitosti formule primjenjuju na $t(F)$, testira se dokažljivost (ne istina) svake potformule od F u skladu s Brouwerovim razumijevanjem logičke istine kao dokažljivosti [15, str. 3].

Gödelov modalni pristup vodio je do dvaju različitih matematičkih pristupa. Prvi je **logika dokažljivosti** (*provability logic*), a drugi uključuje Gödelov prijevod intuicionističke logike u modalnu logiku $\mathbf{S4}$ te njegov nacrt logike dokaza i, napokon, logiku dokaza $\mathbf{LP}$ [15, str. 1]. Logika $\mathbf{GL}$[16] dobiva se dodajući modalnu verziju Löbova teorema[17] logici $\mathbf{K}$ ili $\mathbf{K4}$. $\mathbf{GL}$ formalizira Gödelov drugi teorem o nepotpunosti, Löbov teorem i slične principe dokažljivosti. Istraživati ju je započeo Robert M. Solovay [143], a vjerojatno ju je prvi modalnom logikom smatrao Smiley [141] (prema [15, str. 7]).

---

[13] B ili Bew skraćeno od njem. *beweisbar*, "dokažljiv".

[14] U svojem pismu Gödelu (12. siječnja 1931.) John von Neumann koristio se formalnom dokažljivošću kao modalnolikim operatorom B te je dao kraću derivaciju Gödelova drugoga poučka o nepotpunosti (prema [15]).

[15] U [74] (objavljeno tek kao 1995) u predavanju u Beču pretpostavlja i da obrat vrijedi, što su eksplicitno dokazali tek McKinsey i Tarski 1948. godine [113]. **IPC** jest intuicionistička logika, *intuitionistic propositional calculus*. Za više detalja o intuicionističkoj logici v. [131].

[16] Nazvana je po Gödelu i Löbu.

[17] U svakom formalnom sustavu F s Peanovom aritmetikom, za bilo koju formulu P, ako je dokažljivo u F da "ako je P dokažljivo u F, onda je P istinito", onda je P dokažljivo u F.

Premda su put podastrli Gottlob Frege, Giuseppe Peano, Richard Dedekind i Bertrand Russell, smatra se kako je početak moderne **teorije dokaza** matematičke logike rad Davida Hilberta, posljedica čijega je programa želja za formalizacijom cijele matematike u aksiomatskoj formi, zajedno s dokazom da je takva aksiomatizacija konzistentna. Dakako, zbog Gödelova dokaza nepotpunosti smatra se kako se takav program ne može realizirati, no modificirane verzije kao tzv. relativizirani i revidirani Hilbertovi programi centralni su u teoriji dokaza danas (za više detalja v. [140, poglavlje 7]).

Epistemična logika

Epistemična logika bavi se znanjem i vjerovanjem, ali bez opravdanja. Formalnim se početkom epistemične logike smatra von Wrightov rad [159], koji je nastavljen u Hintikkinoj knjizi *Knowledge and Belief* [90]. Jezik iskazne logike proširuje se operatorom K_c, takvim da se K_cA čita kao "činitelj c zna A", a B_cA kao "činitelj c vjeruje A". Semantika tih operatora napravljena je u tradiciji standardne semantike mogućih svjetova [90]:

- K_cA: u svim mogućim svjetovima kompatibilnim s onime što c zna, slučaj je da A
- B_cA: u svim mogućim svjetovima kompatibilnim s onime što c vjeruje, slučaj je da A.

Dostupni svjetovi smatraju se epistemičnim ili doksastičnim alternativama [90, str. 50] (potonje je slučaj ako se i logike vjerovanja svrstavaju u epistemične logike u širem smislu). Semantika mogućih svjetova za iskaznu epistemičnu logiku s jednim činiteljem c sadržava okvir $\mathcal{F}$ – par $\langle W, R_c \rangle$ – pri čemu je W neprazan skup mogućih svjetova, a R_c binarna relacija dostupnosti (za činitelja c) nad W. Propozicije su skupovi mogućih svjetova u kojima su istinite, a funkcija ϕ pridružuje skupove svjetova atomarnim propozicijskim formulama. Kripkeovski model $\mathcal{M}$ u epistemičnoj logici jest uređena trojka $\langle W, R_c, \phi \rangle$. Atomarna propozicijska formula p, član skupa atomarnih formula $\mathcal{A}$, istinita je u svijetu w u $\mathcal{M}$ akko je w u skupu mogućih svjetova pridruženom p, odnosno: $\mathcal{M}, w \models p$ *akko* $w \in \phi(p), (p \in \mathcal{A})$ [86]. Klasični su aksiomi (npr. [157, str. 32]):

- $K_c(P \to Q) \to (K_cP \to K_cQ)$ (**K**, distribucijski aksiom)
- $K_cP \to \neg K_c \neg P$ (**D**)
- $K_cP \to P$ (**T**)
- $K_cP \to K_cK_cP$ (**4**)

- $\neg K_c P \rightarrow K_c \neg K_c P$ (**5**)

Pritom se **4** naziva pozitivnom introspekcijom: činitelj zna da zna P ako zna da P. Aksiom **5** naziva se negativnom introspekcijom, odnosno ako činitelj ne zna da P, ona on zna da ne zna da P. Također, ako činitelj zna P, onda je P istinito (**T**). Jedan je od klasičnih problema epistemične logike **logičkoga sveznanje** zbog zatvorenosti znanja: kad činitelj c zna sve formule u skupu Γ i P logički slijedi iz Γ, onda c također zna i P. Ako je $\Gamma = \varnothing$, onda činitelj zna sve tautologije.

Već Hintikka [91, str. 475] razmatra nemoguće moguće svjetove, kritizirajući implikaciju da je svaki epistemički mogući svijet logički moguć (odnosno, da je svaka epistemička alternativa danomu svijetu logički moguća). Time Hintikka [91, str. 477] priznaje nemoguće moguće svjetove, naime, činitelj može u dostupnim svjetovima imati i kontradikcije, no možda činitelj nije u poziciji detektirati ih, odnosno epistemički su mogući, ali ne i logički. Takve svojevrsne niše mogu imati kontradikcije, ali ne smatraju se (relevantnim) mogućim svjetovima i stoga sve što vrijedi u svim mogućim svjetovima ne mora vrijediti u takvom svijetu.[18] Fagin et al. [53, str. 337] pak smatraju da se $K_c P$ treba čitati kao "činitelj c zna p implicitno", odnosno "p je moguće znanje činitelja c", odnosno da se napusti ideja da aktualno znanje znači istinu u svim mogućim svjetovima.[19]

Logika dokaza

Artemovljeva **logika dokaza LP** prvi je put obznanjena kao izlaganje na konferenciji 1994. godine, potom kao tehnički izvještaj 1995. godine [10], a objavljena kao [12]. **LP** daje potpunu aksiomatizaciju koncepta aritmetičkoga dokaza s prirodnim operacijama primjene, zbroja i provjerivača dokaza [16, str. 479]. Artemov kao motivaciju uzima intuicionističku pozadinu gdje intuicionistička istina znači dokažljivost, citirajući Troelstru i van Dalena: "Iskaz je istinit ako imamo dokaz za nj, a neistinit ako možemo pokazati

[18] Hintikka se nadovezuje na Rantalino [130] istraživanje, koji je iznio svoje modele urne, gdje se radi o procesu vrednovanja relevantnih domena koje se mogu mijenjati.

[19] Dodatno se razrađuje ideja da je nužno da smo svjesni koncepta prije nego što možemo imati vjerovanja o njemu te pristupaju mogućim svjetovima sintaktičkim pojmom svjesnosti, odnosno $A_c p$ znači "činitelj c svjestan je p", a operatori K_c i X_c stoje za implicitno (istina u svim svjetovima koje činitelj smatra mogućima) i eksplicitno (ako je činitelj svjestan p i implicitno zna p) znanje toga činitelja [53, str. 363].

da pretpostavka da postoji dokaz za taj iskaz vodi kontradikciji" ([152, str. 4], prema [12, str. 1]).[20]

Ciljevi formalizacije kao logike **LP** [12, str. 7] jesu:

- pronaći potpun aksiomatski sustav za klasičnu iskaznu logiku s dodatnim atomima "t je dokaz za F", koje je skicirao Gödel ([74]) te dati intendiranu semantiku za Gödelov sustav **S4**
- formalizirati klasičnu BHK-semantiku za intuicionističku logiku te uspostaviti potpunost intuicionističke logike u odnosu na tu semantiku
- poboljšati tipiziranu kombinatornu logiku[21] i tipizirani lambda-račun.

U logici dokaza opravdanja se predstavljaju takozvanim dokaznim polinomima (*proof polynomials*), izgrađenim iz dokaznih varijabli $x, y, z \ldots$ te dokaznih konstanti $a, b, c \ldots$ binarnim operacijama primjene $\cdot$, zbroja (unija, izbor) $+$ te unarnom operacijom provjerivača dokaza $!$. Formule **LP** jesu formule klasične iskazne logike, proširene formacijskim pravilom: ako je t dokazni polinom i F je formula, onda je $t{:}F$ formula [12, str. 7]. Logika **LP** sadržava postulate klasične iskazne logike, *modus ponens* te aksiome [12, str. 8]:

- $s{:}(F \rightarrow G) \rightarrow (t{:}F \rightarrow (s \cdot t){:}G)$ (primjena, *application*)
- $s{:}F \rightarrow (s+t){:}F$, $t{:}F \rightarrow (s+t){:}F$ (zbroj, *sum*)
- $t{:}F \rightarrow\ !t{:}t{:}F$ (provjerivač dokaza, *proof checker*)
- $t{:}F \rightarrow F$ (refleksija, *reflexion*).

LP također ima i svojstvo **internalizacije**: ako $\vdash F$, onda postoji dokazni polinom p takav da $\vdash p{:}F$, čime se simulira necesitacija. **LP** se može shvatiti kao preoblika logike **S4**, a Artemovljeva eksplicitna dokažljivost, shodno tomu, refleksivna je i tranzitivna. **S4** Artemov [15] naziva "zaboravnom projekcijom" (*forgetful projection*) logike **LP**, odnosno

[20] U izvorniku: *A statement is true if we have a proof of it, and false if we can show that the assumption that there is a proof for the statement leads to a contradiction.* [152, str. 4]

[21] Kombinatorna logika odgovara Hilbertovu formalnomu sustavu u teoriji dokaza. Tzv. Curry-Howardov izomorfizam implicira vezu između logike i programiranja, naime svaki dokaz teorema intuicionističke logike odgovara redukciji tipiziranoga lambda-termina i obratno. Odnosno, dokazni sustavi s jedne strane i modeli komputacije s druge strane smatraju se istim vrstama matematičkih objekata (v. [42], gdje su članci Curryja iz 1958. te Howarda iz 1980.).

pokazano je kako se **LP**-formula F može pretvoriti u modalnu formulu zamjenjujući sve pojavke $t{:}(\cdot))$ u F sa $\Box(\cdot)$.

Specifikacija konstanti (*constant specification*) [12, str. 9] $\mathcal{CS}$ jest konačni skup formula $c_1{:}A_1, \ldots, c_n{:}A_n$, takav da je c_i konstanta, a A_i aksiom. $\mathcal{CS}$ je injektivna ako za svaku konstantu c postoji najviše jedna formula $c{:}A \in \mathcal{CS}$ (svaka konstanta predstavlja dokaz za ne više od jednoga aksioma). **LP**-realizacija modalne formule F jest pridruživanje dokaznih polinoma svim pojavcima modalnosti u F sa specifikacijom svih konstanti u tim dokaznim polinomima [12, str. 25].

Brezhnev i Kuznets [34] pokazuju kako je Artemovljev algoritam građenja realizacija takav da proizvodi dokazne polinome eksponencijalne duljine te modificiraju realizacijski algoritam da proizvede dokazne polinome najviše kvadratne duljine.[22] Drugim su se modalnim logikama bavili Brezhnev [11] ($\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{K4}, \mathbf{D4}$), potom Pacuit [122] i Rubtsova [134][23], koji se bave **S5**, a raznim posrednim logikama bave se i Kuznets [103] te Fitting [63] – $\mathbf{K4^3}$ te **S4.2**. Artemov i Iemhoff [23] donose intuicionističku logiku dokaza, odnosno kompletnu aksiomatizaciju za logiku dokaza u Heytingovoj aritmetici.[24]

Yavorskaya [165] spaja **GL** i **LP** u sustavu **LPP** s dodatnim operatorima $\Uparrow$ i $\Downarrow$, gdje operacija $\Uparrow$ uz dokaz t za F vraća dokaz $\Uparrow t$ za $Provable(F)$, dok $\Downarrow$ uzima dokaz t za $Provable(F)$[25] i vraća dokaz $\Downarrow t$ za F.[26] Nogina [119] eliminira te operatore pa razvija logiku **GLA**, spoj **GL** i **LP**[27], dok Goris [81] pokazuje kako je skup GL-teorema realiziranih u **LP** presjek **GL** i **S4**.

---

[22] U teoriji složenosti ili kompleksnosti poželjno je da je kompleksnost algoritma ili programa što niža, odnosno pripada što nižoj hijerarhiji klasa kompleksnosti. Odnosno, što se tiče vremenske kompleksnosti, najbolji je rezultat u konstantnom vremenu, slijede ga logaritamska vremena, potom linearno vrijeme, kvadratno, kubno, polinomno, eksponencijalno, faktorijelno te dvostruko eksponencijalno vrijeme ($2^{2^{p(n)}}$), pri čemu je $p(n)$ polinomna funkcija od n).

[23] Prvi se bave negativnim introspekcijskim operatorom ?, koji provjerava je li dana opravdavajuća tvrdnja neistinita [16, str. 494].

[24] Heytingova aritmetika uzima aksiome Peanove aritmetike, ali kao pravila zaključivanja rabi intuicionističku logiku, stoga ne vrijedi zakon isključenja srednjega.

[25] Gödelov predikat formalne dokažljivosti.

[26] Sadržava postulate **GL** i **LP**, zajedno s $t{:}F \to (\Uparrow t){:}\Box F$ i $t{:}\Box F \to (\Downarrow t){:}F$, uz pravila iz sustava B: $t{:}F \to F$, $t{:}F \to \Box t{:}F$ i pravilo refleksije **RR**, kojim iz $\vdash \Box F$ zaključujemo $\vdash F$.

[27] Sadržava postulate **GL** i **LP** te: $t{:}F \to \Box F$, potom $\neg t{:}F \to \Box\neg t{:}F$ te $t{:}\Box F \to F$ uz pravilo refleksije **RR**, koje omogućava da zaključimo $\vdash F$ iz $\vdash \Box F$.

Fitting [63] je razvio logiku **S4LP** s aksiomima i pravilima obojih logika, zajedno s dodatnim aksiomom $\Diamond t{:}\phi \rightarrow \Box\phi$. Naime, realizacijski teorem povezuje **LP** sa **S4**, a svaki teorem **S4** ima realizaciju, odnosno zamjenu modalnim operatorima opravdavajućim oznakama koje proizvode teoreme **LP** [60]. Ako je X formula, onda je i $\Box X$ formula te vrijede standardni aksiomi **S4**.[28] Postoje dvije semantike za **S4LP** s različitim motivacijama, a prva je Artemovljeva [14], koja dopušta više činitelja, svaki sa svojim operatorom znanja K_i i s opravdanjima te s višestrukim relacijama dostupnosti: jedna za svakoga činitelja i jedna za opravdavajuće oznake. Druga semantika, koju donosi Fitting [60, str. 5], pokazuje da znanje ima eksplicitni opravdavajući aspekt i implicitni modalni aspekt, a opravdavajuće oznake pružaju analizu našega znanja te nisu samo elementi znanja koje dijelimo s drugim činiteljima.

Logika dokaza postaje prva logika u obitelji logike opravdanja, a pomoću **LP** propozicijska intuicionistička logika prima BHK-semantiku jer su dokazne oznake u **LP** BHK-oznake shvaćene kao klasični dokazi [21]. Sam Artemov [16] smatra da je logika dokaza anticipirana u Gödela [74], a da je razvijena u radovima logike dokaza (npr. [10], [12], [115]), dok ju je u epistemologiji najbolje okarakterizirao Benthem [155]. Realizacijske teoreme najviše istražuje Fitting [61], koji ističe kako se **LP** može i oslabiti ispustivši operator ! i njegov aksiom (**LP(T)**) ili pak ojačati dodajući negativni provjerivač dokaza (**LP(S5)**).

Semantiku za logiku dokaza prvi rade Alexei Mkrtychev [115] i Melvin Fitting [59], pri čemu se Booleovi ili Kripkeovi modeli povećavaju evidencijskom funkcijom, koja pridružuje dokazne oznake iskazima prije pridruživanja istinitosnih vrijednosti.[29] Generalna je ideja da iskaz $t{:}F$ vrijedi u danom svijetu s akko je t prihvatljiv dokaz za F u s i ako F vrijedi u svakom svijetu s' dostupnom iz s.

Mkrtychevljevi modeli imaju booleovske propozicije, opravdavajuće oznake jesu skupovi formula, a evaluacijska funkcija $*$ (naziva je *proof-theorem assignment*) pridružuje dokaz t skupu formula $*(t)$. $t{:}F$ vrednuje se na sljedeći način: t je opravdanje za F i F je istinito: $\models t{:}F$ *akko* $F \in t$ *i* $\models F$ [115, str. 267]. Mkrtychevljeva semantika prva je nearitmetička semantika za logiku dokaza, koja je pokazana odlučljivom.

---

[28] V. str. 14.

[29] Fittingovi će i Mkrtychevljevi modeli detaljnije biti obrazloženi u primjeni na logike opravdanja.

Fittingovi modeli temelje se na Kripkeovim modelima te su strukture $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{V} \rangle$. Pritom je okvir $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R} \rangle$, gdje je $\mathcal{G}$ neprazan skup mogućih svjetova, a $\mathcal{R}$ binarna refleksivna i tranzitivna relacija dostupnosti evidencije u $\mathcal{G}$. Moguća evidencijska funkcija $\mathcal{E}$ jest preslikavanje iz svjetova/stanja i dokaznih polinoma u skupove formula. $X \in \mathcal{E}(\Gamma, t)$ čita se kao "X je jedna od formula koju dokazuje t u stanju Γ" [59, str. 3]. Za sve dokazne polinome s i t, sve formule F i Y i za sve $\Gamma, \Delta \in \mathcal{G}$ vrijedi:

- $(X \to Y) \in \mathcal{E}(\Gamma, s)$ i $X \in \mathcal{E}(\Gamma, t)$ implicira $Y \in \mathcal{E}(\Gamma, s \cdot t)$ (**aplikacija**)
- $\Gamma \mathcal{R} \Delta$ implicira $\mathcal{E}(\Gamma, t) \subseteq \mathcal{E}(\Delta, t)$ (**monotonost**)
- $X \in \mathcal{E}(\Gamma, t)$ implicira $t{:}X \in \mathcal{E}(\Gamma, !t)$ (**provjerivač dokaza**)
- $\mathcal{E}(\Gamma, s) \cup \mathcal{E}(\Gamma, t) \subseteq \mathcal{E}(\Gamma, s + t)$ (**zbroj**).

Kvantificiranu logiku dokaza **QLP** također razvija Melvin Fitting [60], uvodeći kvantifikaciju nad evidencijom te vezu između egzistencijalnoga kvantifikatora i necesitacije u **S4**. **QLP** Fitting opisuje kao konzervativno proširenje iskazne logike **LP** [64, str. 20].

Logiku dokaza prvoga reda **FOLP** razvilime o su Artemov i Yavorskaya ([25], razvijenije u: [26]). Dokazne tvrdnje predstavljene su formulama oblika $t{:}_X A$, gdje je X konačni skup pojedinačnih varijabli koje se smatraju globalnim parametrima za supstituciju, a svi pojavci varijabli iz X koji su slobodni u A također su slobodni i u $t{:}_X A$ (sve su ostale slobodne varijable od A lokalne i stoga vezane u $t{:}_X A$).[30] Semantika za logiku dokaza prvoga reda nalazi se u [64].

[30] Dodana je i nova operacija $\mathtt{gen_x(t)}$ koja odgovara generalizaciji nad pojedinačnom varijablom x te aksiom $t{:}_X A \to \mathtt{gen}_x(t){:}_X \forall x A$, $x \notin X$.

Poglavlje 3

Logike opravdanja

3.1 Opća načela

Artemov [16] prvi put rabi ime "logika opravdanja", odnosno *justification logic* ili *logic of justification* u članku iz 2008. godine [16], gdje je opisuje kao opći logički sustav za zaključivanje o epistemičnim opravdanjima. Artemov [16, str. 477], osvrnuvši se na analizu znanja kao istinitoga opravdanoga vjerovanja, tvrdi kako su epistemične logike formalizirale pojmove znanja i vjerovanja, no da u domeni dokažljivosti nalazimo samo matematičke dokaze te smatra kako logika opravdanja može poslužiti za premošćivanje mogućega jaza između epistemične logike i moderne epistemologije. Artemov kao jedan od ciljeva članka uspostavlja matematički pojam opravdanja, koji bi epistemične logike učinio izražajnijima [16, str. 478]. Logika **LP** postala je prvom logikom među logikama opravdanja, koje su poslije nastavili razvijati mnogi istraživači, a prvenstveno Artemov i Fitting (usp. [22]).

Postoji nekoliko tumačenja logike opravdanja te $t{:}F$ možemo čitati kao [16, ibid.]:

- t je opravdanje za F
- t prihvaća kakav činitelj kao opravdanje za F
- t je dovoljni resurs za F
- F zadovoljava uvjet t itd.

Naime, u logici opravdanja ne analizira se direktno što znači da t opravdava F, nego se pokušava tu relaciju karakterizirati aksiomatski: Artemov [16, str. 278] navodi kako je takav pristup sličan Booleovoj logici, gdje se ne analizira smisao kakve formule, primjerice disjunkcija $p \vee q$, nego se pretpostavljaju određeni logički aksiomi i istinitosne tablice o toj formuli. Artemov [16, ibid.] pretpostavlja da su opravdanja “apstraktni objekti koji imaju strukturu, operacije nad opravdanjima potencijalno su izvršive, činitelji ne gube niti ne zaboravljaju opravdanja, činitelji primjenjuju zakone klasične logike i prihvaćaju njihove zaključke itd.”[31]

Načelo primjene (*application*) uzima opravdanja s i t te proizvodi opravdanje $s \cdot t$, odnosno vrijedi: $s{:}(F \rightarrow G) \rightarrow (t{:}F \rightarrow (s \cdot t){:}G)$, što vrijedi i u logici dokaza, a povezano je s epistemološkim načelom zatvorenosti znanja. Uz primjenu vrijedi i **načelo monotonosti**, odnosno ako imamo $s{:}F$, onda kakva god evidencija t da se javi, kombinirana evidencija $s + t$ ostaje opravdanje za F. Odnosno: $s{:}F \rightarrow (s + t){:}F$, $s{:}F \rightarrow (t + s){:}F$. Dakle, operacija $+$ uzima opravdanja s i t te proizvodi $s + t$, što je opravdanje za sve opravdano bilo sa s, bilo sa t [16, str. 482], analogno operaciji zbroja u logici dokaza, gdje se radi o spoju dokaza za s i t.

3.2 $\mathbf{J_0}$ i $\mathbf{J}$

Osnovna logika opravdanja $\mathbf{J_0}$ sastoji se od klasičnih iskaznih aksioma i pravila *modus ponens*, aksioma primjene i aksioma monotonosti. Opravdavajuće oznake grade se od opravdavajućih varijabli $x, y, z \ldots$ i opravdavajućih konstanti a, b, c (s indeksima), pri čemu konstante označavaju atomarna opravdanja, a varijable nespecificirana opravdanja [16, str. 482]. To je logika opravdanja apsolutno skeptičnoga činitelja za kojega nijedna formula nije dokažljivo opravdana, odnosno za bilo koji t i F ovdje se ne može derivirati $t{:}F$. Međutim, takav činitelj ipak može doći do relativnih opravdavajućih zaključaka oblika *ako* $x{:}A, y{:}B \ldots z{:}C$ *vrijedi, onda* $t{:}F$ [16, ibid.]. Dakle, ne govori se da su pojedini iskazi opravdani, ali može se reći da ako je što opravdano, onda je što drugo opravdano.

[31] *(...) justifications are abstract objects which have structure, operations on justifications are potentially executable, agents do not lose or forget justifications, agents apply the laws of classical logic and accept their conclusions, and so forth* [16, str. 482].

U logici $\mathbf{J_0}$ nema necesitacijskoga pravila, a druge se logike aksiomatiziraju dodavajući dodatne aksiomatske sheme logici $\mathbf{J_0}$. Odnosno, logika opravdanja $\mathbf{J}$ aksiomatski je karakterizirana kao $\mathbf{J_0}$ proširena konačnim skupom aksiomatskih shema, čije se instancije nazivaju aksiomima od $\mathbf{J}$ te mogu uključivati i druge funkcijske simbole osim $\cdot$ i $+$ [65].

Princip logičke svjesnosti (*logical awareness principle*) govori da su logički aksiomi opravdani sami po sebi, odnosno činitelj prihvaća logičke aksiome opravdanima na bilo kojem stupnju internalizacije, tj. *za svaku evidencijsku konstantu c i za svaki aksiom A, $c{:}A$ opet je aksiom* [16, str. 8].[32]

Pravilo internalizacije aksioma (**R4**) govori kako *za svaki aksiom A i svaku konstantu c, $c{:}A$ opet je aksiom.* Shodno tomu, $\mathbf{J}$ – **logika djelomičnih opravdanja** (*logic of partial justifications*) – dobiva se dodavanjem toga pravila, $\mathbf{J} = \mathbf{J_0} + R4$ [16, str. 9].

Specifikacija konstanti jest zatvoren skup formula oblika $c{:}A$, gdje je c konstanta, a A aksiom, odnosno specifikacija konstanti (*constant specification*) **CS** za danu logiku opravdanja $\mathbf{J}$ jest skup formula koji zadovoljava sljedeće uvjete [65, str. 5]:

- članovi **CS** jesu oblika $c_n{:}c_{n-1}{:}\ldots c_1{:}A$, pri čemu je $n > 0$, A je aksiom od $\mathbf{J}$, a svaki c_i jest konstantni simbol
- **CS** sadržava sve posredne specifikacije u smislu da ako je $c_n{:}c_{n-1}{:}\ldots c_1{:}A$ u **CS**, onda je i $c_{n-1}{:}\ldots c_1{:}A$ također u **CS**.

Specifikacija konstanti može biti: [16, str. 10.]

- prazna: $\mathbf{CS} = \emptyset$
- konačna: **CS** je konačan skup formula
- aksiomatski prikladna: *za svaki aksiom A, postoji konstanta c, takva da $c{:}A \in$ **CS***
- totalna specifikacija konstanti: $TCS = \{c{:}A |$ *A je bilo koji aksiom, a c bilo koja konstanta*$\}$.[33]

[32] Princip logičke svjesnosti analogan je pravilu necesitacije u standardnoj modalnoj logici, gdje slijedi $\vdash F$ implicira $\vdash \Box F$.

[33] U [20] dodaje se i specifikacija konstanti koja je injektivna, odnosno svaka konstanta opravdava najviše jedan aksiom.

U slučaju prazne specifikacije konstanti zapravo se radi o logici $\mathbf{J_0}$. Drugi slučaj reprezentativan je jer će bilo koja specifična derivacija u logici opravdanja uključivati konačan skup konstanti. Aksiomatski prikladna specifikacija konstanti zapravo govori da svaki aksiom – uključujući nove aksiome dobivene samom specifikacijom konstanti – ima opravdanje. Totalna specifikacija konstanti očekivano je aksiomatski prikladna [21].

Ključno svojstvo logika opravdanja jest njihova sposobnost da internaliziraju svoje derivacije kao dokažljive opravdavajuće tvrdnje [21]. **Dedukcijski teorem** ili **internalizacija** za logiku $\mathbf{J}$ glasi: *ako* $\vdash F$*, onda* $\vdash p{:}F$ *za kakvu opravdavajuću oznaku* p [16, str. 10]. Dedukcijski teorem vrijedi jer $\mathbf{J}$ sadržava iskazne aksiome i *modus ponens*.[34]

Logika $\mathbf{J_0}$ i njezino proširenje specifikacijom konstanti analogoni su najmanjoj normalnoj modalnoj logici $\mathbf{K}$. To je pokazano **realizacijskim teoremom**,[35] pri čemu se uzima aksiom logike $\mathbf{J}$ i svaka opravdavajuća oznaka zamjenjuje modalnim operatorom $\Box$, a ta se zamjena naziva zaboravnom funkcijom. Odnosno, *ako je* X *teorem od* $\mathbf{K}$*, postoji zamjena pojavaka operatora* $\Box$ *tako da se negativni pojavci zamjenjuju distinktivnim opravdavajućim varijablama, pri čemu je rezultat teorem od* $\mathbf{J}$*, koji rabi aksiomatski prikladnu specifikaciju konstanti* [62, str. 5].

3.3 Ostale logike opravdanja

Logika faktivnih opravdanja (*logic of factive justifications*) $\mathbf{JT}$ dobiva se dodavanjem aksioma faktivnosti na logiku $\mathbf{J}$ ili $\mathbf{J_0}$: $t{:}F \rightarrow F$ [17, str. 12]. Taj aksiom tvrdi da su opravdanja dovoljna da činitelj zaključuje istinu, odnosno analogan je spomenutomu aksiomu epistemične logike[36], gdje ako činitelj zna kakvu činjenicu, ona je ona istinita. Dakako, kako je pokazao i Gettier [75], sama faktivnost ne mora voditi do znanja. Logike faktivnih opravdanja jesu $\mathbf{JT_0}$ i $\mathbf{JT}$, pri čemu je $\mathbf{JT_0} = \mathbf{J_0} +$ *faktivnost*, a $\mathbf{JT} = \mathbf{J} +$ *faktivnost*.

---

[34] U [16] donosi se indukcija po duljini dokaza. Pretpostavimo $\vdash F$. Ako je F aksiom, prema pravilu internalizacije aksioma, onda je $c{:}F$ aksiom. Ako se F dobije pomoću pravila *modus ponens* iz $X \rightarrow F$ i X, onda induktivnom hipotezom dobivamo $\vdash s{:}(X \rightarrow F)$ i $\vdash t{:}X$ za neki s i t. Aksiomom primjene dobivamo $\vdash (s \cdot t){:}F$.

[35] Osim izvornoga pojavljivanja i dokazivanja realizacijskoga teorema za **LP**, u [32] nalaze se modularni dokazi realizacijskih teorema.

[36] Aksiom istine: $K_iF \rightarrow F$.

Analogno epistemičnoj logici gdje činitelj zna da zna, u logici opravdanja činjenica da činitelj prihvaća t kao dovoljnu evidenciju za F služi kao dovoljan dokaz za $t{:}F$. Takva metaevidencija može biti, primjerice, kad recenzent ili pak računalni provjerivač dokaza (*proof checker*) provjerava je li dokaz u članku točan [21]. Pozitivni introspekcijski operator $!$ može se dodati u jezik tako da uz dano opravdanje t činitelj proizvodi opravdanje $!t$ za $t{:}F$, tako da vrijedi **aksiom pozitivne introspekcije**:[37] $t{:}F \rightarrow !t{:}t{:}f$. Logika **J4** dobiva se kao **J** s aksiomom pozitivne introspekcije: **J4** = **J** + *aksiom pozitivne introspekcije*, a spomenuta logika dokaza **LP** analogna je dodavanju aksioma pozitivne introspekcije na logiku **JT**, to jest: **LP** = **JT** + *aksiom pozitivne introspekcije*, odnosno logika dokaza **LP** zapravo je logika **JT4**.

Negativnu introspekciju već za logiku dokaza razmatraju Pacuit [122, str. 2] (*negative proof checker*) i Rubtsova [135, str. 2] (*negative checker*). Takva operacija pomoću operatora $?$ može kad t nije opravdanje za F zaključiti $\neg t{:}F$. Odnosno, **aksiom negativne introspekcije** glasi $\neg t{:}F \rightarrow ?t{:}\neg t{:}F$. Shodno tomu dobivamo sljedeće logike [21]: **J45** = **J4** + *aksiom negativne introspekcije*, potom **JD45**[38] = **J45** + $\neg t{:}\bot$ te **JT45** = **J45** + *aksiom faktivnosti* [16, str. 495].

Faktivnost opravdanja ne zahtijeva se u osnovnim sustavima logike opravdanja, što znači da mogu prezentirati i djelomična i faktivna opravdanja. Faktivni aksiom naslijeđen je iz logike dokaza gdje, u skladu s intuicionističkom tradicijom istine kao dokažljivosti, posjedovanje dokaza za F čini F istinitim. Takav je aksiom primijenjen na opravdanja koja vode do znanja [21], no sama faktivnost ne garantira znanje, što je pokazano Gettierovim primjerima [75].

Fitting u [65] pokazuje kako je obitelj logika opravdanja beskonačna, tako da analizira Geachove logike, u koje je inkorporiran modalni aksiom **G** $\Diamond\Box X \rightarrow \Box\Diamond X$, za koje je pokazano kako imaju opravdavajuće parnjake.

Baltag, Renne i Smets [27] donijeli su logiku opravdanoga vjerovanja, eksplicitnoga znanja i konkluzivne evidencije. Takva logika povezuje se s Fittingovom semantikom. Uvode i razliku između eksplicitne i implicitne konkluzivne evidencije, odnosno $t{:}\phi$ znači da je t u potpunosti točan argument za ϕ i temeljen je na točnim, istinitim premisama,

[37] Princip pozitivne introspekcije predlažu već Artemov i Nogina u [24] za epistemičnu logiku s opravdanjima.

[38] Logika **JD** dobije se dodavanjem $t{:}\bot \rightarrow \bot$ na logiku **J**, a u kontekstu logike dokaza njome se bavio Brezhnev [11].

no to možda nije dostupno samom činitelju, a ako mu je dostupno, radi se o eksplicitnom konkluzivnom dokazu [27, str. 55].

U Hrvatskoj se logikom opravdanja posebice bavio Srećko Kovač, prvenstveno u njezinoj kauzalnoj interpretaciji. Modalnost se mijenja kauzalnošću u [98], s obzirom na to da se "razlog" smatra dovoljno općim terminom da pokrije i epistemološki i ontološki smisao asertorične modalnosti. Aksiomi su aksiomi klasične logike prvoga reda, identiteta te prilagođenih i proširenih aksiomatskih shema iz **FOLP** kao poopćenja drugoga reda [98, str. 336].

Kovač [100] također kauzalno interpretira Gödelov ontološki dokaz u formatu logike opravdanja prvoga reda, s opravdavajućim analogonima modalnih aksioma **K**, **T** te pravila aksiomatske necesitacije.

U [101] analizira se filozofsko-logički kontekst Gödelove ideje kauzalnosti kao filozofski fundamentalnoga koncepta te se različite Gödelove ideje interpretiraju i objašnjavaju u kontekstu logike opravdanja. Primjerice operacija primjene interpretira se kao Gödelovo harmoničko "držanje zajedno" dijelova, dok operacija zbroja dopušta disharmoniju i međusobno isključivanje dijelova.

3.4 Semantika logika opravdanja

Detaljan pregled modela za logiku opravdanja donosi Artemov u [19], gdje se uspostavlja sljedeća hijerarhija:

- *temeljni i Mkrtychevljevi modeli* $\subset$ *Fittingovi modeli* $\subset$ *modularni modeli* $\subset$ *modeli opravdavajuće svjesnosti* (justification awareness models).

Prva matematička semantika logike opravdanja dana je za logiku dokaza **LP** [12], gdje je $t{:}F$ tumačeno kao "t je dokaz za F".

Osnovni modeli, razvijeni u [19] i [20], sastoje se od tumačenja članova skupa F_m i T_m. Pritom je T_m skup opravdavajućih oznaka, a F_m skup formula, izgrađen induktivno iz iskaznih atoma koristeći se Booleovim poveznicima i pravilom formiranja opravdavajuće formule: ako je F formula, $F \in F_m$, a t opravdavajuća oznaka, $t \in T_m$, onda je i $t{:}F$ formula, $t{:}F \in F_m$. Značenje pridruženo formulama jest klasična istinitosna vrijednost, 0 za *neistinito* i 1 za *istinito* te vrijedi standardno ponašanje poveznika. No, **značenje opravdavajućih oznaka jest skup formula za koje su one opravdanja** ($*{:}T_m \mapsto 2^{F_m}$). Odnosno $\models_* t{:}X$ akko $X \in t^*$. Iskazi su tumačeni semantički kao istinitosne vrijednosti, a **opravdanja su tumačena sintaktički kao skupovi formula**.

Svojstvo **hiperintenzionalnosti** vodi do toga da, premda su dvije formule F i G jednake ($F^* = G^*$), moguće je da $t{:}F$ i $t{:}G$ nisu kad je $F \in t^*$, a $G \notin t^*$, odnosno $\models_* t{:}F$, ali $\not\models_* t{:}G$. Ako je $S \subseteq F_m$, osnovni model od S je mogući svijet koji sadržava S u kanonskom modelu, odnosno maksimalno konzistentan skup Γ formula, pri čemu $t{:}F \in \Gamma$ čitamo kao $F \in \{X | t{:}X \in \Gamma\}$.[39]

Osnovni modeli generalizirani su u [18] u **modularne modele** da bi se predstavili mogući svjetovi. Naime, Artemov kritizira Fittingove modele jer se ne dotiču logičkoga tipa opravdanja, odnosno istinitosna vrijednost opravdavajuće tvrdnje $t{:}F$ definirana je bez tumačenja za opravdanje t [18, str. 2]. Artemov smatra da u matematici dobivamo odgovor o raznim entitetima, kao npr. "što je realni broj?" te da bismo trebali jednako tako dobiti odgovor i na pitanje "što je opravdanje?". Artemov zadržava tumačenje $*$ skupova formula u modelu kao podskupa skupa mogućih svjetova ($*{:}F_m \mapsto 2^W$) te tumačenje opravdavajućih oznaka T_m u svakom svijetu kao skupove formula ($*{:}W \times T_m \mapsto 2^{F_m}$). Pritom pišemo t^*_u za tumačenje oznake t u svijetu u, a svaki t^*_u skup je formula za koje je t opravdanje u u: $u \models t{:}F$ akko $F \in t^*_u$ [18, str. 3]. Ovi su modeli modularni jer se mogu specificirati tumačenja opravdanja i atomarnih iskaza, a potom graditi tumačenja svih formula na uniforman, modularan način. Kao i u osnovnim modelima, opravdanja su interpretirana sintaktički kao skupovi formula.

Fittingovi modeli [59] oblika su $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{V} \rangle$, pri čemu je $\langle \mathcal{G}, \mathcal{R} \rangle$ okvir, u kojem je $\mathcal{G}$ neprazan skup mogućih svjetova, a $\mathcal{R}$ binarna refleksivna i tranzitivna evidencijska relacija nad $\mathcal{G}$. Moguća evidencijska funkcija (*possible evidence function*) $\mathcal{E}$ preslikavanje je iz svjetova i dokaznih polinoma u skupove formula. Ako je $F \in \mathcal{E}(u, t)$, to znači da je F jedna od formula za koje t služi kao moguća evidencija u svijetu u. Razlika između Fittingovih i modularnih modela leži u vredovanju opravdavajućih tvrdnji: prema Artemovu [19, str. 3]: $u \models t{:}F$ akko $F \in t^*(u)$ i $R(u)$[40], odnosno $t{:}F$ povlači da F vrijedi u svim dostupnim svjetovima (*justification yields belief*) ili

[39] Dokaz potpunosti v. u [19, str. 7] i [20, str. 2].

[40] Fittingova relacija binarna je, odnosno tipa $\Gamma\mathcal{R}\Delta$, Artemov pojednostavljuje opis kako bi zornije usporedio Fittingove i modularne modele. Pritom je modularni model Kripkeov model $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \vdash)$ s osnovnim modelom $*(u)$ u svakom svijetu $u \in \mathcal{W}$.

"F je vjerovano". Osnovni modeli mogu se smatrati posebnim slučajevima Fittingovih modela, ali i Fittingovi modeli mogu se promatrati kao modularni modeli sa spomenutim principom "opravdanje proizvodi vjerovanje" (*justification yields belief*) (ibid.). Artemov takve modele naziva induciranim modularnim modelima [17, str. 11].

Mkrtychevljevi modeli [115] razvijeni su za logiku dokaza $\mathbf{LP}$ te su u njima iskazna i opravdavajuća vjerovanja slična onima u osnovnim modelima, gdje se iskazi ponašaju klasično booleovski, a opravdavajuće oznake skupovi su formula. Mkrtychevljevi modeli vrednovat će $t{:}F$ kao "t je opravdanje za F i F je istinito": $\models_* t{:}F$ akko $F \in t^*$ i $\models_* F$[19]. Evaluacijska funkcija $*(.)$ (*proof-theorem assignment*) pridružuje dokaz t skupu formula $*(t)$. Mkrtychevljevi modeli analogni su Fittingovim modelima, samo s jednim mogućim svijetom [63]. Bliski su refleksivnim osnovnim modelima, odnosno svaki refleksivni osnovni model jest Mkrtychevljev model i svaki Mkrtychevljev model sadržava refleksivni osnovni model [19, str. 2].

Konačno, **modeli opravdavajuće svjesnosti** (*justification awareness models*) uvedeni su u [19] i [20]. Osnovni **JAM**-model jest trojka $(*, \mathcal{A}, \mathcal{E})$, pri čemu je:

- $*$ je osnovni $\mathbf{J}^-(\mathbf{CS})$-model[41] (sa speficikacijom konstanti)
- $\mathcal{A} \subseteq T_m$ zatvoren je skup $\mathcal{A}$ prihvaćenih opravdanja (*accepted justifications*)
- $\mathcal{E} \subseteq T_m$ zatvoren je skup $\mathcal{E}$ znanjotvornih[42] opravdanja (*knowledge-producing justifications*).

Skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{E}$ sadržavaju sve konstante. Takva podjela pomaže pri rješavanju poznatih epistemoloških paradoksa, kao što su Gettierovi primjeri. U modelu JAM $(*, \mathcal{A}, \mathcal{F})$ rečenica F vjeruje se ako postoji $t \in \mathcal{A}$ takav da $\models_* t{:}F$. Rečenica F znana je ako postoji $t \in \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, takav da $\models_* t{:}F$. [19, str. 9]. No, ako bismo imali opravdanje $t{:}F$ koje vrijedi za $t{:}G$, takvo da je t opravdanje koje proizvodi znanje ($t \in \mathcal{A}$) za F, ali ne i za G, korisno je pretpostaviti načelo da su opravdanja "točkasta" (*pointed*): *postoji najviše jedna formula F takva da $t{:}F$* [19, ibid.].

I najmanji su modeli dovoljni za potpunost logika opravdanja, tako da put od osnovnih i Mkrtychevljevih modela preko Fittingovih i modularnih modela pa sve do modela opravdavajuće svjesnosti nije put prema postizanju potpunosti i pouzdanosti sustava,

---

41 Artemov gradi logiku $\mathbf{J}^-$ pomoću aksioma klasične iskazne logike, pravila *modus ponens* te pravila primjene ili aplikacije.

42 Za kovanje termina zahvaljujem kolegi Ivanu Restoviću.

nego skup različitih modela koji su prikladni za različite situacije vezane uz evidenciju, vjerovanje i znanje [19, str. 13].

Artemov u [14] donosi **višečiniteljni model mogućih svjetova** te uvodi nove operatore znanja koji predstavljaju znanje temeljeno na evidenciji (*evidence-based knowledge*). Takav sustav dobiva se proširujući višečiniteljnu logiku znanja sa sustavom dokaznih tvrdnji $t{:}\phi$, što čitamo kao "t je dokaz za ϕ", temeljeno na sljedećim pretpostavkama [14, str. 5]:

- svi aksiomi imaju evidenciju
- evidencija je neosporiva i implicira pojedinačno znanje bilo kojega činitelja
- evidencija je provjerljiva
- evidencija je monotona, tj. nova evidencija ne kvari postojeću.

Činitelj ne može imati znanje temeljeno na evidenciji bez građenja postojeće evidencijske oznake, čime se rješava problem logičkoga sveznanja. Artemov dodaje operator opravdanoga znanja $J\phi$, čija je epistemička semantika "postoji opravdanje za ϕ", dobiven kolabiranjem svih evidencijskih oznaka u jednu modalnost J: $t{:}\phi \mapsto J\phi$. U epistemičkoj semantici u Kripkeovu stilu $J\phi$ odgovara bilo kojoj relaciji dostupnosti koja sadržava dohvatljivost.

Artemov generalizira Fittingovu semantiku tako da odgovara višečiniteljnomu sustavu za znanje temeljeno na evidenciji. Okvir je struktura $(W, R_1, \ldots, R_m, R)$, gdje je W neprazan skup stanja ili mogućih svjetova, $R_1, \ldots, R_n$ binarne su relacije dostupnosti nad W, povezane s činiteljima $1 \ldots n$, a R je binarna relacija dostupnosti nad W. Relacije $R_1, \ldots, R_n$ refleksivne su, a R je refleksivna i tranzitivna te sadržava sve R_i. Moguća evidencijska funkcija E preslikava iz stanja i opravdavajućih oznaka u skupove formula te $\phi \in E(u, t)$ čitamo kao "ϕ je jedna od formula za koje je t moguć dokaz u svijetu u" [14, str. 10].

Neformalno, $t{:}\phi$ istinito je u danom svijetu u akko je t prihvatljiva evidencija za ϕ u u i ϕ je istinito u svim svjetovima v dostupnima iz u pomoću evidencijske relacije dostupnosti R. ϕ je istinito u svijetu $u \in W$ ako $u \models \phi$, inače je ϕ neistinito u u. Formula ϕ istinita je u modelu ako je ϕ istinito u svakom svijetu modela, a ϕ je valjano ako je ϕ istinito u svakom modelu [14, ibid.].

3.5 Logika opravdanja prvoga reda

S obzirom na to da je logika dokaza dio obitelji logika opravdanja, valja istaknuti kako je **logika dokaza prvoga reda** prvi put izložena u [25]. Jezik iskazne logike dokažljivosti proširuje se modalnim operatorom $\Box$ za dokažljivost, a modalna formula $\Box F$ tumači se kao iskaz o dokažljivosti, odnosno "postoji dokaz za F". Kao što je i Gödel htio donijeti konstruktivniju inačicu dokažljivosti,[43] tako iz logike dokažljivosti dolazimo do logike dokaza prvoga reda eliminirajući egzistencijalne kvantifikatore skrivene u modalnosti dokažljivosti i zamjenjujući ih konkretnim dokazima [25, str. 477]. Primjerice, formula $\Box A(x)$, koja predstavlja iskaz "za dani x formula $A(x)$ dokažljiva je" te sadržava x kao parametar, raspisana je tako da stavimo na vidjelo egzistencijalne kvantifikatore skrivene u modalitetu dokažljivosti i stoga glasi "za dani x postoji y takav da je y kod dokaza za $A(x)$". Tzv. skolemizacijom[44] dobiva se funkcija f koja proizvodi dokaz od $A(x)$, odnosno za dani x, $f(x)$ *je dokaz od* $A(x)$.

Logika dokaza prvoga reda – **FOLP** – dalje je razvijena u [26]. U jeziku logike **FOLP** dokazni predikat predstavljen je formulama oblika $t{:}_X A$, gdje je X konačni skup pojedinačnih varijabli koje se smatraju globalnim parametrima i slobodnim varijablama te formule. Svi pojavci varijabli iz X koji su slobodni u A također su slobodni i u $t{:}_X A$, a sve ostale slobodne varijable u A smatraju se lokalnima i stoga vezanima u $t{:}_X A$ [26, str. 5]. Dokazi se predstavljaju dokaznim oznakama koje ne sadržavaju pojedinačne varijable (ibid.). Svaka dokazna konstanta i dokazna varijabla jest dokazna oznaka, a ako su t, s dokazne oznake, onda su i $t \cdot s$, $!t$, $t + s$ i $\mathtt{gen}_x(t)$ dokazne oznake, pri čemu je $\mathtt{gen}_x$ unarni funkcijski simbol koji odgovara generalizaciji nad pojedinačnom varijablom x[45].

Semantiku za **FOLP** donosi Fitting u [64]. Modeli su monotoni modeli prvoga reda za logiku **S4**, a Fitting bira monotonost zbog motivacije pružanja semantike intuicionističkoj logici [64, str. 4] – naime, matematičke su strukture *ondje*, nepromjenjive i bezvremenske, otkrivaju se i ne stvaraju. Fitting se koristi evidencijskom funkcijom $\mathcal{E}$

---

43 Gödel umjesto Bp, "postoji dokaz za p" predlaže aBp kao "a je dokaz za p".

44 Svaka se formula prvoga reda može pretvoriti u Skolemovu normalnu formu (preneksna normalna forma s univerzalnim kvantifikatorima) bez mijenjanja njezine zadovoljivosti. Ugrubo, egzistencijalni kvantifikatori zamjenjuju se funkcijskim simbolima.

45 Uvodi se novi aksiom: $t{:}_X A \rightarrow \mathtt{gen}_x(t){:}_X \forall x A, x \notin X$. Naivna projekcija toga aksioma daje Barcaninu formulu $\Box A(x) \rightarrow \Box \forall x A(x)$.

te $\mathcal{E}(t, A)$ označava, za svaku dokaznu oznaku t i formulu A, skup mogućih svjetova u kojem t služi kao značajan dokaz za A. Značajan dokaz nije konkluzivan nego je u nekom kontekstu relevantan. $t{:}A$ istinito je u mogućem svijetu ako je A istinito u svim dostupnim svjetovima i t je značajna evidencija za A u tom svijetu. $t{:}_{a,b}Q(a, b, z, w)$ istinito je u mogućem svijetu Γ ako je t značajna evidencija za $Q(a, b, z, w)$ u Γ. Odnosno, $\Gamma \in \mathcal{E}(t, Q(a, b, z, w))$ i za svaki Δ dostupan iz Γ i svaki c, d u kvantifikacijskoj domeni Δ, $Q(a, b, c, d)$ istinito je u Δ [64, ibid.].

U samoj logici opravdanja radovi koji se bave logikom opravdanja prvoga reda iznimno su recentni. Fitting i Salvatore u kolovozu 2018. [66] daju nacrt **logike prvoga reda sa semantikom konstantne domene**, no bez realizacijskoga teorema. Donosi se kvantificirana logika **FOLPb** s opravdavajućim analogonom Barcanine formule te se rezultati proširuju na kvantificiranu verziju logike **JT45**. Uvodi se nova opravdavajuća oznaka $b(\cdot)$ za formiranje Barcanine formule u logici opravdanja. Aksiomatski sustav sadržava klasične aksiome logike prvoga reda te logike dokaza prvoga reda, uz *modus ponens* i generalizaciju, uz dodatni aksiom $\forall y t{:}_{X_y}\phi(y) \rightarrow b(t){:}_X \forall y \phi(y)$, koji je opravdavajući analogon Barcanine formule $\forall \Box Fx \rightarrow \Box \forall x Fx$ [66, str. 3].

U semantici Fitting i Salvatore rabe Fittingov model kao strukturu $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I}, \mathcal{E} \rangle$, pri čemu je $\mathcal{W}$ neprazan skup mogućih svjetova, $\mathcal{R}$ relacija dostupnosti, $\mathcal{D}$ domena, $\mathcal{I}$ funkcija tumačenja koja svakomu n-mjesnomu relacijskomu simbolu P i svakomu mogućemu svijetu w pripisuje n-mjesnu relaciju $\mathcal{I}(P, w)$ u domeni. $\mathcal{E}$ je evidencijska funkcija, a za svaku opravdavajuću oznaku t i formulu ϕ, $\mathcal{E}(t, \phi) \subseteq \mathcal{W}$ [66, str. 6].

Poglavlje 4

Evidencijalnost i evidencijalni jezici

4.1 Evidencijalnost i epistemička modalnost

4.1.1 Evidencijalnost i evidencijalne strategije

Evidencijalnost je lingvistička kategorija čije je primarno značenje izvor informacije [5, str. 4]. Cilj je ovoga rada pokazati kako se evidencijalnost kao gramatička kategorija može modelirati pomoću formalne logike i kako takva formalizacija može donijeti bolji uvid u funkcioniranje evidencijala kao opravdanja u takvim jezicima. Indirektnu motivaciju za takvo istraživanje postavio je Yuri Gurevich, koji je u istraživanju opravdanja krenuo u smjeru autorizacije, ali motiviran evidencijalnošću.[46]

Evidencijale ćemo logički gledati kao opravdanja i shodno tomu razviti nove logike na temelju logike opravdanja kako bismo bolje opisali funkcioniranje evidencijala kao opravdanja u evidencijalnim jezicima. Međutim, kako bi formalizacija bila adekvatnom, moramo promotriti kakva je funkcija evidencijala u evidencijalnim jezicima.

[46] Početak je istraživanja izložen na predavanju kongresa UNILOG u Riu 2013. godine [82], koji je potom razrađen u evidencijalnu autorizaciju. Potonja je temeljena na jeziku autorizacije raspodijeljenoga znanja (*Distributed Knowledge Authorization Language* ili **DKAL**), gdje se spominje jezik tuyuca kao primjer evidencijalnoga jezika [30]. U predavanju iz 2013. spominje se kako postoje logike opravdanja, ali da autor istražuje u drugom smjeru, u smjeru autorizacije i informacije.

Da bi se što smatralo evidencijalom, takav morfem ili veća jedinica mora kao svoje temeljno značenje imati 'izvor informacije'. Primjerice, da je hrvatski evidencijalni jezik, ne bismo mogli reći rečenicu *Ana sjedi*, a da ne kažemo vidimo li to, čujemo li npr. škripanje stolice, je li mi tko rekao da Ana sjedi ili to zaključujem na temelju tragova, običaja ili razumskih pozadinskih razloga. Evidencijalnost pruža izvor informacije, a evidencijal može imati svoju istinitosnu vrijednost, može se negirati i ispitivati, bez negiranja ili ispitivanja samoga predikata [5, str. 4]. Naime, izvor informacije može biti istinit, a informacija neistinita i obratno, a govornikova fluentnost u evidencijalima često označava status u zajednici i koliko poznaju jezik i lingvističke konvencije [5, str. 5].

Gramatički evidencijal u rečenici ne znači da će ta rečenica biti automatski istinita, niti da se događa kakvo vrednovanje. Evidencijal daje izvor informacije za tu tvrdnju, što je blisko s jedne strane pojmu dokaza – koji je analizirala logika dokaza – a s druge strane pojmu opravdanja – za što se specijalizirala logika opravdanja. Međutim, ne radi se o pravoj evidenciji u kakvom sudskom ili formalnom smislu, stoga je epistemološki i logički pojam opravdanja mnogo bliži kategoriji evidencijalnosti.

Primjerice, u jeziku tariana[47] različiti će sufiksi označiti različit evidencijal, odnosno izvor informacije za tu tvrdnju:

(6) Juse irida di-manika-**ka**
José nogomet 3.sg.-igrati-EVID
"José je igrao nogomet [vidjeli smo to]."

(7) Juse irida di-manika-**mahka**
José nogomet 3.sg.-igrati-EVID
"José je igrao nogomet [čuli smo to]."

(8) Juse irida di-manika-**nihka**
José nogomet 3.sg.-igrati-EVID
"José je igrao nogomet [zaključili smo to iz vizualne evidencije, npr. tragovi na travi]."

(9) Juse irida di-manika-**sika**
José nogomet 3.sg.-igrati-EVID
"José je igrao nogomet [pretpostavili smo to na temelju onoga što znamo o njemu]."

[47] Tariana ili tariano ugroženi je jezik aravačke porodice s oko 100 govornika u Brazilu i Kolumbiji. [1]

(10) Juse irida di-manika-**pidaka**
José nogomet 3.sg.-igrati-EVID
"José je igrao nogomet [netko nam je to rekao]."

Jedan evidencijal ne mora uvijek nositi samo jednu informaciju, odnosno jedan može označavati sve osjetilne informacije i slično. Najčešći su sustavi koji razlikuju informaciju iz prve i iz druge ruke, a to su ujedno i najjednostavniji sustavi, dok se može raditi čak o šesteročlanim sustavima [5, str. 23].

Lingvistička evidencijalnost gramatička je kategorija te je u jezicima s gramatičkom evidencijalnošću uporaba evidencijala obligatorna, odnosno izostavljanje izvora za kakvu tvrdnju dovodi do nepotpunih ili negramatičkih rečenica [5, str. 6]. Evidencijali mogu dobiti i sekundarna značenja pouzdanosti, vjerojatnosti ili mogućnosti, no to ne znači da su epistemički modali evidencijalima, odnosno rečenica kao *Vidim da Ana sjedi* nije evidencijalna jer izvor informacije nije obligatoran u hrvatskom jeziku. Naime, evidencijalnost se smatra zasebnom gramatičkom kategorijom [43] odvojenom od modalnosti, a nekoć su bili smatrani modalima zato što su istraživači bili previše pod utjecajem indoeuropske tradicije, gdje kategorija evidencijalnosti ne postoji.

Jezici s evidencijalima mogu biti striktno obligatorni, poput jezika tuyuca[48] ili tukano[49], zato što su evidencijali u fuziji s glagolskim vremenima i načinima, dok će u jeziku kao kamayurá[50] rečenice biti neprirodne, umjetne ili čudne, no većina je jezika negdje između. Međutim, to što se evidencijali ne rabe stalno, ne znači da nisu na neki način obligatorni, primjerice u jeziku shipibo-konibo[51] evidencijalni markeri ne moraju se pojavljivati u svakoj surečenici ili svakoj rečenici ako su jasni iz konteksta ili su već bili izrečeni u diskursu [5, str. 78].

Epistemička modalnost bavi se govornikovom prosudbom ili stupnjem pouzdanosti, vjerovanja ili znanja kakve propozicije, način na koji će govornik iskomunicirati svoje sumnje ili sigurnosti. Odnosno, ona je vrednovanje vjerojatnosti da će se određeno hipotetsko stanje stvari realizirati pod nekim pretpostavkama, da se realiziralo ili da se trenutačno re-

---

[48] Tuyuca ili tujuka tukoanski je jezik Brazila i Kolumbije. Ima oko 1000 izvornih govornika, a sadržava pet različitih vrsta evidencijala [1].

[49] Tukano se govori u Brazilu i Kolumbiji, a ima oko 6000 govornika [1].

[50] Kamayurá pripada porodici tupi-gvarani i govori se u Brazilu, a ima oko 600 govornika [1].

[51] Shipibo ili shipibo-konibo panoanski je jezik Perua, a ujedno i službeni jezik Perua. Govori ga oko 26 000 govornika [1].

alizira [120, str. 21]. Epistemička modalnost realizirana je ili gramatički ili negramatički. Gramatički način izražavanja uključuje modalne glagole i načine (npr. “moći”, primjerice *On bi mogao biti u gradu*), gramatičke afikse i čestice, a negramatički načini uključuju leksikalizaciju ili intonaciju, primjerice raznim prilozima kao “vjerojatno”, “navodno”.

Premda se i evidencijalnost i epistemička modalnost bave evidencijom, razlikuju se po tom što čine s njom. Naime, epistemička modalnost *vrednuje* evidenciju i na temelju toga vrednovanja pridružuje mjeru pouzdanosti u govornikov iskaz te će se za to obično rabiti kakav epistemički modal. S druge pak strane evidencijal *tvrdi* da postoji evidencija za govornikov iskaz, ali odbija interpretirati tu evidenciju, u smislu da se zauzima kakav stav ili vrednovanje dane tvrdnje [43].

Frajzyngier [68, str. 244] smatra da se jezici dijele na jezike prvoga i drugoga tipa, pri čemu su jezici prvoga tipa oni u kojima se indicira da govornik vjeruje u istinitost iskaza, a jezici drugoga tipa jesu jezici u kojima svaka rečenica indicira kako je govornik usvojio to znanje, a da ne reprezentira govornikova vjerovanja. De Haan [43] smatra da je problem što je obligatornost evidencijalnost opuštenija od idealnoga slučaja, a jedinim se potpuno obligatornim sustavom smatra i spomenuti jezik tuyuca. De Haan tvrdi da i jezici prvoga tipa razlikuju evidencijalnost od epistemičke modalnosti, pokazujući na primjeru nizozemskoga kako se glagol *moeten* može rabiti da bi se pokazalo da govornik ima samo indirektnu informaciju dostupnu za iskaz, a istodobno govornik može dodati slaganje ili neslaganje sa situacijom ili istinitošću iskaza, primjerice:

(11)	Het	moet	een	goede	film	zijn,	en	ik	ben	daar	zeker	van
	to	mora	DET	dobar	film	biti	i	ja	sam	ondje	siguran	od

“Govori se da je to dobar film i uvjeren sam u to.”

U nekim jezicima postoje prijepori radi li se o kategoriji evidencijalnosti ili samo o vrsti evidencijalne strategije. Primjerice, hiškarjana[52] ima šest “verifikacijskih” čestica, od čega dvije prenose značenja slična evidencijalima, a to su informacija iz druge ruke te dedukcija, dok je vizualni evidencijal nemarkiran [5, str. 63]. Matasović [109, str. 224] te čestice smatra pravim evidencijalima, odnosno na glagolu je obavezno izraženo odakle govornik zna ili naslućuje da se radnja vrši:

(12)	Ton	**ha-tiï**	Waraka.
	ići.3.sg.	EVID	Waraka

[52] Hiškarjana ili hixkaryana karipski je jezik Brazila, kojim govori oko 500 ljudi oko rijeke Nhamundá [1].

"Waraka je otišao [priča se]."

(13) Ton [ø] Waraka.
ići.3.sg. EVID Waraka
"Waraka je otišao [znam jer sam vidio]."

(14) Yaroro mïkan **ha-mï**.
doista 2.sg.reći.3.sg. EVID
"Očigledno govoriš istinu [*ha-mï* je evidencijal zaključivanja]."

(15) Kana yanïmno **ha-na**.
riba 3.sg.podići.3.sg. EVID
"Možda je ulovio ribe [*ha-na* je evidencijal nesigurnosti]."

(16) Awanaworo nomokyaha **ha-mpïnï**.
sutra 3.sg.doći EVID
"Sigurno će doći sutra [*ha-mpïnï* je evidencijal sigurnosti]."

4.1.2 Evidencijalnost i hrvatski jezik

Hrvatski, kao indoeuropski jezik, ne posjeduje kategoriju evidencijalnosti, no Matasović i Gnjatović [110] pokušali su utvrditi mogu li se neke konstrukcije smatrati evidencijalnim strategijama. Odnosno, na evidencijalnost gledaju kao na kognitivnu, a ne gramatičku domenu. Smatraju kako sintaktičke konstrukcije s evidencijalnom ekstenzijom značenja jesu zavisne rečenice s veznicima *kako* i *da* te s *verba sentiendi*, odnosno s glagolima percepcije. Primjerice *Gleda kako ona dolazi* ili *Čujem da dolazi* te konstrukcije s glagolom "činiti se", primjerice *Restoran mi se čini dobrim* za razliku od *Čini mi se da je restoran dobar*.

S obzirom na to da je evidencijalnost gramatikalizirana, u hrvatskom nije prisutna kao u evidencijalnim jezicima, no moguć bi oblik blizak gramatikaliziranom obliku bila konstrukcija tzv. preteritofutura, češće aktivnoga u hrvatskim dijalektima. Maretić [108, str. 634] navodi da se taj oblik rabi za "prošle događaje koji su se možda dogodili, a možda i nijesu". Primjerice "bit će čuvao" ili prošireno s česticom *da* npr. "bit će da je došao". Kako cijela konstrukcija glagolskoga vremena uzima oblik modalnoga značenja "možda" ili "vjerojatno", a razvijena je od gramatičkih oblika, smatramo je mogućim primjerom evidencijalne strategije u hrvatskom jeziku. Takva je konstrukcija bliska njemačkom futuru II, koji može, uz vremenske priloge, označavati pretpostavku da se radnja izvršila, odnosno dati značenje "vjerojatno", npr. *Sie **wird** gestern in Zagreb **angekommen sein**.* = "Bit će da je jučer stigla u Zagreb". Takvo bi korištenje gramatikaliziranoga oblika – glagolskoga vremena – moglo biti interpretirano kao svojevrsni inferencijalni evidencijal, odnosno skraćeno zaključivanje. O vrstama evidencijala i o inferencijalnim evidencijalima bit će više riječi u poglavlju 4.2.

4.2 Evidencijalni sustavi i jezici

4.2.1 Dvočlani evidencijalni sustavi

Evidencijalni sustavi mogu biti dvočlani, hločlani, četveročlani te peteročlani i više. Aikhenvald [5, str. 25] u svojoj kapitalnoj studiji o evidencijalima evidencijalne sustave s dvama izborima dijeli na:

- **A1**. iz prve ruke – ne iz prve ruke
- **A2**. iz druge ruke – sve ostalo
- **A3**. reportirano – sve ostalo
- **A4**. senzorna evidencija – reportirano
- **A5.** auditorno – sve ostalo.

Sustav **A1** odnosi se na opoziciju između informacije koja je dobivena percepcijom, dakle osjetilima, prvenstveno vidom, dok drugi evidencijal obuhvaća sve ostalo. Primjerice, u čerokiju[53] je prvi evidencijal -*ʌʔi*, a drugi -*e ʔi* te se rabe u perfektu, što je oslikano sljedećim primjerima: [5, str. 26]

(17) wesa u-tlis-**ʌʔi**
mačka ono-trčati-EVID
"Mačka je otrčala [vidio sam to]."

(18) un-atiyohl-**ʌʔi**
oni-svađati se-EVID

[53] Čeroki ili cherokee irokijski je jezik s oko 10 000 govornika, a govori se u Oklahomi i Sjevernoj Karolini [1].

“Svađali su se [čuo sam to].”

(19) uhyʌdla u-nolʌn-**ʌʔi**
hladan ono-puhati-EVID
“Puhao je hladan vjetar [osjetio sam ga].”

(20) uyo ges-**ʌʔi**
pokvaren biti-EVID
“Bilo je pokvareno [pomirisao sam to].”

S druge pak strane, ako informacija nije perceptivna, odnosno senzorna iz prve ruke, rabi se drugi evidencijal, ponajviše za informacije iz druge ruke ili za zaključivanje [5, str. 27]:

(21) u-wonis-**eʔi**
on-govoriti-EVID
“Govorio je [netko mi je to rekao].”

(22) u-gahnan-**eʔi**
ono-kišiti-EVID
“Kišilo je [zaključujem na temelju lokvi na podu].”

(23) guso-ʔi u-wonis-**eʔi**
Muskogee-u on(a)-govoriti-EVID
“Držala je govor u Muskogeeju [znam da je planirala u nedjelju, a sad je ponedjeljak].”

Takve su razlike u jezicima obično u prošlom vremenu, a sustavi tipa **A1** nalaze u brojnim sjevernoameričkim i južnoameričkim indijanskim jezicima. Sustavi **A2** razlikuju iskustva koja nisu senzorna, najčešće inferencijalna ili iz druge ruke, od svega ostaloga (što je obično neobilježeno), a primjeri su recimo abhaski[54] ili općenito dosta kavkaskih jezika [5, str. 31].

Sustav **A3**, gdje se razlikuje reportativni evidencijal od svega ostaloga (što je neobilježeno), dosta su rašireni u svijetu, posebice u sjevernoameričkim indijanskim jezicima. Primjer su neki južnoamerički jezici poput arabele,[55] neki tibetsko-burmanski jezici kao

[54] Sjevernokavkaski jezik s oko 200 000 govornika [1].

[55] Arabela je gotovo izumrli jezik Indijanaca Arabela, jezik porodice zaparo, kojim se služi oko 50 ljudi u Peruu [1].

ham,[56] neki zapadni austronezijski filipinski jezici te sjevernoamerički indijanski jezici kao npr. menomini[57] [5, str. 32].

Sustav **A4** razlikuje senzornu evidenciju od reportativne evidencije, a primjeri su australski jezici ngiyambaa[58] i diyari,[59] uz povijesno potvrđeni sustav jezika wintu[60] [5, str. 34].

Razlikovanje auditorne evidencije nasuprot svemu ostalomu vrlo je netipičan sustav **A5**, koji je pronađen samo u jeziku yuchi[61] [5, str. 37].

4.2.2 Tročlani evidencijalni sustavi

Tročlani evidencijalni uključuju barem jedan senzorni evidencijal, a dosad je potvrđeno pet tipova [5, str. 42]:

- **B1**. izravni (vizualni), inferencijalni, reportativni
- **B2**. vizualni, nevizualni senzorni, inferencijalni
- **B3**. vizualni, nevizualni senzorni, reportativni
- **B4**. nevizualni senzorni, inferencijalni, reportativni
- **B5**. reportativni, kvotativni, sve ostalo.

---

56 Ham ili kham sinotibetski je jezik Nepala s oko 30 000 govornika [1].

57 Menomini ili menominee gotovo je izumrli algonkijski jezik sjeverozapadnoga Wisconsina s oko 35 izvornih govornika i velikim težnjama za revitalizacijom jezika [1].

58 Ngiyambaa je pamanjunganski jezik, koji je 2005. imao dva živa govornika i vjerojatno će uskoro biti izumrlim jezikom [1].

59 Diyari ili dieri aboridžinski je jezik pamanjunganske porodice, koji je izumro u kasnom 20. stoljeću [1].

60 Jezik wintu izumrli je jezik vintuanske porodice Sjeverne Kalifornije. Od 2011. pokušava se revitalizirati jezik wintu, dok današnji Indijanci Wintu govore engleskim [1].

61 Yuchi ili euchee izolirani je jezik Inijanaca Tsoyaha u Oklahomi. Godine 2016. imao je četiri govornika, no kao drugi jezik barem još desetak [1].

Sustav **A1** razlikuje izravni evidencijal, koji se obično odnosi na vizualnu, rjeđe auditornu percepciju, potom inferencijalni i reportativni evidencijal. Pritom je inferencijalni evidencijal vezan uz zaključivanje, a reportativni uz prijenos informacije iz druge ruke. Takav sustav primjerice imamo u jeziku wanka kečua[62] [5, ibid.]:

(24) Chay-chruu-**mi** achka wamla-pis walashr-pis
ovo-LOC-EVID mnogo djevojčica-također dječak-također
alma-ku-lkaa-ña
kupati se-REFL IMPF-pl.-PERF
"Mnoge djevojčice i dječaci plivali su [vidio sam ih]."

(25) Daañu pawa-shra-si ka-ya-n-**chr**-ari
polje završiti-PART-također biti-IMPF-3-EVID-EMPH
"Polje bi moglo biti potpuno uništeno [zaključujem]."

(26) Ancha-p-**shi** wa'a-chi-nki wamla-a-ta
previše-GEN-EVID plakati-CAUS-2 djevojčica-1-ACC
"Tjeraš mi kćer da previše plače [rekli su mi]."

Primjer za **B1** jesu svi ostali kečuanski jezici. Primjer za **B2** jest jezik washo[63] i jezik siona[64] [5, str. 46]. Primjeri sustava **B3** jesu oksapmin,[65] potom maricopa[66] i dulong[67] [5, str. 47].

Sustav **B4**, koji razlikuje nevizualnu senzornu informaciju, inferencijalnost i reportativnost, nalazimo u jezicima nganasan[68] i eneckom,[69] jezicima samojedske grane uralskih

[62] Wanka kečua/quechua kečuanski je jezik peruanske Amazone. s oko 250 000 govornika [1].

[63] Washo je ugroženi sjevernoamerički izolirani jezik s oko 20 govornika, u području Kalifornije i Nevade [1].

[64] Siona ili sioni tukoanski je jezik Kolumbije i Ekvadora s oko 500 govornika [1].

[65] Oksapmin je izolirani jezik Papue Nove Gvineje s oko 8000 govornika [1].

[66] Maricopa ili pipaash ugroženi je jumanski jezik Indijanaca Maricopa u Arizonu, s oko 35 govornika [1].

[67] Dulong ili drung sinotibetski je tibetoburmanski jezik u Kini, s oko 14 000 govornika [1].

[68] Nganasan je samojedski jezik s oko 125 govornika na poluotoku Taymyr u Rusiji [1].

[69] Enets ili enecki samojedski je jezik u sjevernom Sibiru s oko 40 govornika [1].

jezika. Nevizualni senzorni evidencijal tradicionalno je nazivan auditornim.[70] Neobilježeni slučaj može se smatrati vizualnom informacijom, kao npr. u jeziku retuarã[71] [5, str. 47-48].

Sustav **B5** razlikuje reportativni i kvotativni evidencijal od svega ostaloga, pri čemu se kvotativnost odnosi na direktno citiranje kad je što tko rekao. Takvu razliku imaju brojni indijanski jezici, kao primjerice komanče[72] ili dakota[73] [5, str. 50].

4.2.3 Četveročlani evidencijalni sustavi

Četveročlani evidencijalni sustavi sastoje se od barem jedne senzorne specifikacije, a potvrđena su tri tipa [5, str. 51]:

- **C1**. vizualni, nevizualni senzorni, inferencijalni, reportativni
- **C2**. direktni (vizualni), inferencijalni, pretpostavljeni, reportativni
- **C3**. direktni, inferencijalni, reportativni, kvotativni.

Što se tiče sustava **C1**, primjer su tukoanski jezici u sjeverozapadnoj Amazoni. Primjerice, u jeziku tukano:

(27) diâyɨ wa'î-re yaha-**ámi**
pas riba-TOP ukrasti-EVID
"Pas je ukrao ribu [vidio sam]."

(28) diâyɨ wa'î-re yaha-**ásĩ**
pas riba-TOP ukrasti-EVID
"Pas je ukrao ribu [čuo sam buku]."

[70] Moguće bi objašnjenje bilo i da je planinsko područje uralskih jezika orijentirano na auditornu komunikaciju.

[71] Retuarã ili tanimuca toukoanski je jezik Kolumbije s oko 300 govornika [1].

[72] Komanči ili comanche utoastečki je indijanski jezik s oko 100 govornika u Oklahomi [1].

[73] Dakota ili dakhota siuanski je jezik prvenstveno Sjeverne i Južne Dakote, s oko 300 govornika [1].

(29) diâyɨ wa'î-re yaha-**ápĩ**
pas riba-TOP ukrasti-EVID
"Pas je ukrao ribu [zaključio sam]."

(30) diâyɨ wa'î-re yaha-**ápɨ'**
pas riba-TOP ukrasti-EVID
"Pas je ukrao ribu [rekli su mi]."

Sustav **C2** odnosi se na opreku izravnoga, inferencijalnoga, pretpostavljenoga i reportativnoga evidencijala, pri čemu se pretpostavljeni evidencijal odnosi na opće znanje ili pretpostavke, dok se inferencijalni evidencijal ponajviše odnosi na inferenciju iz percepcije ili dokaza. Takvi su jezici primjerice tsafiki[74] ili shipibo-konibo [5, str. 54].

U sustavu **C3** javlja se opreka direktnoga, inferencijalnoga, reportativnoga i kvotativnoga evidencijala, što je primjerice slučaj jezika kora[75] ili jezika sj. embera.[76] [5, str. 56-58].

4.2.4 Višečlani evidencijalni sustavi

Evidencijalni sustavi s pet ili više izbora nalaze se u pojedinačnim jezicima kao što su tariana, tradicionalni wintu, tuyuca ili foe.[77] Primjerice, u tradicionalnom wintuu razlikuju se vizualni, nevizualni senzorni, inferencijalni, pretpostavljeni (iskustveni) i reportativni evidencijal [5, str. 60]:

(31) k'upa-**be**
cijepati-EVID
"Cijepa drva [vidio sam ga]."

(32) k'upa-**nt$^{\mathbf{h}}$e**
cijepati-EVID

---

74 Tsafiki, znan i kao tsachila ili colorado, barbakoanski je jezik u Ekvadoru, a govori ga oko 2000 ljudi [1].

75 Kora ili cora uto-astečki je jezik Meksika, s oko 20 000 govornika [1].

76 Sjeverni embera ili cholo čokoanski je jezik u Kolumbiji s oko 70 000 govornika [1].

77 Foe je papuanski jezik na Papui Novoj Gviineji s oko 3000 govornika [1].

"Cijepa drva [čuo sam ga ili sam pak osjetio komadić drveta]."

(33) k'upa-**re**
cijepati-EVID
"Cijepa drva [zaključio sam, npr. nema ga u kolibi]."

(34) k'upa-**?el**
cijepati-EVID
"Cijepa drva [zaključio sam na temelju iskustva i općega znanja, npr. znam da mu je to posao koji radi svaki dan]."

(35) k'upa-**ke**
cijepati-EVID
"Cijepa drva [rekli su mi]."

4.2.5 Evidencijalni sustavi: pregled

Općenito su najčešći spomenuti evidencijali sljedeći: vizualni, nevizualni senzorni, inferencijalni, pretpostavljeni (iz izravnoga iskustva), iz druge ruke ili reportativni te kvotativni (netko je direktno što rekao). Ne postoji jezik sa specijalnim evidencijalom za miris, okus ili osjećaj. Inferencijalni evidencijali često se dijele na zaključivanje iz općega znanja te na zaključivanje iz neposrednoga iskustva, dok se evidencijali iz druge ruke obično dijele na nespecificirani izvor u reportativnim evidencijalima te na kvotativne evidencijale, gdje se direktno navodi da je netko određeni nešto rekao.

De Haan [44, str. 196] kao glavnu opreku vidi direktne i indirektne evidencijale, odnosno senzorne i one nesenzorne, pri čemu se često opreka radi i između evidencijala iz prve ruke i evidencijala iz druge ruke. Takva opća podjela dobro će nam doći za opću logičku karakterizaciju evidencijalnih jezika.

4.3 Evidencijali i istina

De Haan [43] tvrdi da su rečenice s evidencijalima nemarkirane u odnosu na izražavanje istinitostne vrijednosti te da je eksplicitna funkcija evidencijala odbiti prihvatiti bilo kakvu odgovornost za istinitost iskaza. U tradiciji filozofije jezika i logike Russell smatra da su propozicije ili stavci upravo ti koji su istiniti ili neistiniti, ali niječe da se radi o mentalnim entitetima. Naime, Russell smatra kako istinito ili neistinito općenito nije mentalno. Odnosno, istinitost i neistinitost ne ovise o spoznavatelju te propozicije kao nositelji istinitosnih vrijednosti nisu tek mentalne reprezentacije, nego same činjenice ili stanja stvari [107, str. 15]. Takvo je shvaćanje usporedno s evidencijalnošću: ako evidencijal shvatimo kao mentalni entitet govornika i ono što on percipira kao izvor dokazne građe, to ne znači da je evidencijal nepogrešiv. Odnosno, sama tvrdnja bit će istinita ili ne, nevezano uz to što evidencijal tvrdi, koji pak donosi potpuno novu dimenziju gledanja na cijeli iskaz.

Aikhenvald [5, str. 98] pokazuje kako je semantički evidencijal poput predikata, odnosno u jeziku tariana govornik može razlikovati istinitosnu vrijednost evidencijala od istinitosne vrijednosti iskaza te rabiti pogrešan evidencijal uz točnu informaciju i obratno.

(36)

i-kesini	pune	ka-kari-ka-**pida**
2.pl-REL	caraná	REL-ići.PERF.m.DECL-PRES-EVID

hyukade-**naka**
ne pojaviti se-EVID

diha	ñamu	nihya-**sika**-niki
on	zloduh	3.sg-jesti.EVID.COMPL

di-na	nese-nuku	na-yena-ka	na-ya-**ka**	ñamu
3.sg.-OBJ	ondje-TOP	3.pl-mnogo-DECL	3.pl-živjeti-EVID	zloduh

"Tvoj je prijatelj onaj koji je išao po lišće carane [rekli su mi]. On nije ovdje [vidim to]. Zloduh ga je pojeo [pretpostavljam]. Ovdje je bilo mnogo zloduha [vidjela sam to]."

U iskazima se radi o ženi koja je bila uznemirena jer je muž otišao po palmino lišće premda mu je rekla da ne ode, a dva dana kasnije i dalje nije došao kući te navedeni primjer govorim njegovim prijateljima. U prvom iskazu rabi prezentski reportativni evidencijal, koji se rabi za znanje preneseno iz nečijega iskaza, no s obzirom na to da ga je vidjela kako odlazi, trebala je rabiti vizualni evidencijal te je i prezentski oblik reportativa neprikladan jer se to dogodilo prije dva dana. Na taj način govornica se udaljava od radnje jer je prezentira kao da citira nešto što je tek naučila. Rabeći vizualni evidencijal za to da je vidjela duhove izdaje se da je kći moćnoga zloga šamana – naime govornici vjeruju kako samo šamani mogu vidjeti zle duhove [5, str. 99].

Moguće je i imati neistinit iskaz, a točne evidencijale, primjerice [5, ibid.]:

(37) ma-yekade-**mahka** nuha
NEG-znati-EVID ja
"Nisam znao (koji je dan tjedna to bio)."

Kontekst je iskaza takav da čovjek kaže laž zloduhu tvrdeći da ne zna koji je dan, ali zapravo je znao da se radi o Velikom petku, kad se ne smije ići loviti, prema vjerovanjima zajednice Tariana. Rabi točan nevizualni evidencijal koji se uvijek rabi s glagolima znanja, no iskaz nije istinit.

Sličan je primjer iz tariane, gdje je u priči zli ujak pustio da riba pojede božanskoga sina, a nevizualni evidencijal iskorišten je da se smanji odgovornost za zločin, u smislu da nije vidio da se to dogodilo: [4, str. 139]

(38) ka:ru-ka nuha nu-a-**mahka** nu-hña-niki
strah-SBJV ja 1.sg-pustiti-EVID 1.sg-jesti-COMPL
"Bojeći se, pustio sam da (riba) pojede (tvojega sina)."

Evidencijali mogu biti u dosegu negacije, primjerice negirano je vizualno iskustvo, a ne sam glagol, premda se u mnogim jezicima izvor informacije doista ne može negirati [5, str. 256]:

(39) àjɔ̀q áŋ dì ə àshú ɣá má **ŋá**
on PART tući PART tko ne EVID
"Ne vidim tko ga tuče."

Međutim, u većini jezika evidencijali se doista ne mogu direktno opozivati, primjerice iskaz će u u čejenskom biti gramatičan u prvom primjeru s negiranim sadržajem iskaza, ali neće u sljedećim dvama primjerima [117, str. 51]:

(40) Méave'ho'eno é-héståhe-**se̊stse** Mókéé'e
Lame Deer 3-biti iz-EVID Mókéé'e
"Mókéé'e je iz Lame Deera [čujem]."

(41) É-sáa-hetóme̊stove̊-hane-ø.
3-NEG-biti istinit-MOD-EVID

É-sáa-héståhe-he-ø Meave'ho'eno
3-NEG-biti iz-MOD-EVID Lame Deer

"To nije istina. Ona nije iz Lame Deera."

(42) **É-sáa-hetóme̊stove̊-hane-**ø**.
3-NEG-biti istinit-MOD-EVID

Né-sáa-néstomóné-he-**ø**
3-NEG-čuti-MOD-EVID

**"To nije istina. Nisi to čuo."

(43) **É-sáa-hetóme̊stove̊-hane-**ø**.
3-NEG-biti istinit-MOD-EVID

Hovánee'e é-sáa-ne̊-hé-he-**ø**
nitko 3-NEG-ANPH-reći-MOD-EVID

**"To nije istina. Nitko to nije rekao."

Međutim, evidencijal se u većini jezika može preispitivati, primjerice u čejenskom [117, str. 52]:

(44) Noma'héohe'e éståhe-**se̊stse** Mókéé'e
Kingfisher 3-biti iz-EVID Mókéé'e

Néváåhe tsé-ne̊-he-estse?
tko DEP-ANPH-reći-DEP-3.sg

"– Mókéé'e je iz Kingfishera [čujem]. – Tko je to rekao?"

U primjeru iz cuzco-kečue [55, str. 181] sugovornik negira da je Juan ukrao kravu jer Juan nije lopov, što je opće znanje, što pokolebava i prvoga govornika. Faller govori kako se ne negira zapravo propozicija *Juan je ukrao kravu* nego se prividne kontradikcije uspostavljaju dalje na temelju novoga pozadinskoga lanca:

(45) Juan-**chá** vaca-ta-qa suwa-rqa-n
Juan-EVID krava-ACC-TOP ukrasti.PERF-3.sg.
"Juan je ukrao kravu."

(46) Mana-**n** payu-chu kan-man ka-rqa-n. Pay-qa mana-**n** suwa-chu.
ne-EVID on-NEG biti-3-IRR biti-PERF-3 on-TOP ne-EVID lopov-NEG
"To nije mogao biti on. On nije lopov."

(47) Arí. Pay-qa kan-man ka-rqa-n. Ichaqa mana-**n** crei-ni-chu.
da on-top biti-IRR biti-PERF-3 ali ne-EVID vjerovati-1.sg.-NEG
"Da, to je mogao biti on. Ali ne vjerujem da jest."

Dakako, kao što je i očekivano, rečenice tipa Mooreova paradoksa nisu prihvatljive, odnosno gramatične su, ali govornicima zvuče čudno i tako ih ne bi kazali. Takve rečenice mogu biti istinite, logički su konzistentne i nisu očite kontradikcije, premda se čine apsurdnima, npr. *Vani pada snijeg, ali ne vjerujem da pada.* Hintikka je taj problem analizirao u [90]. Primjerice u lilloetu[78], koji ima reportativni (iz druge ruke) evidencijal *-ku7*, inferencijalni evidencijal *-k'a* i izravni evidencijal (percepcija, najčešće vid) *-an'* [111]:

(48) **wa7 **k'a** kwis, t'u7 aoz t'u7 k-wa-s kwis
IMPF EVID kiša ali NEG samo DET-IMPF-POSS kiša
**"Kiši [zaključujem], ali ne kiši."

(49) **wa7-as-**an'** kwis, t'u7 aoz t'u7 k-wa-s kwis
IMPF.SBJV.EVID kiša ali NEG samo DET-IMPF-POSS kiša
**"Kiši [vidim], ali ne kiši."

Analogno je i u jeziku gitksanu,[79] gdje je uz senzorni inferencijalni evidencijal *-ńakw* čudno konstruirati takve rečenice jer sam evidencijal govori o zaključivanju iz direktno viđenoga, odnosno o zaključivanju iz percepcije [124, str. 83]:

(50) **hla **ńakwhl** dim wis, ii needii hla ńakw dim
INCEP EVID-DET FUT kiša CONJ NEG INCEP EVID FUT
**"Sigurno počinje kišiti [vidim] i sigurno ne počinje."

Međutim, ovisno o jeziku, postoji mogućnost da su neke vrste evidencijala podatne za propitivanje. Primjerice, u čejenskom se može negirati sadržaj uz reportativni evidencijal jer osoba ne mora vjerovati evidenciji iz druge ruke [117, str. 58]:

(51) É-hoo'kōhó-**mêse** naa oha ná-sáa-oné'seómátsésto-he-ø
3-kiša-EVID i CNTR 1-NEG-vjerovati-MOD-EVID

---

[78] Znan kao st'át'imcets, committeeliški je jezik Britanske Kolumbije u Kanadi, ugrožen je s oko 200 govornika, od čega su gotovo svi stariji od 60 godina [1].

[79] Gitksan ili gitxsan, gitxsanimaax ugroženi je jezik skupine Chimmesyan, a govori ga oko 1000 govornika u Britanskoj Kolumbiji u Kanadi [1].

"Kiši [kažu], ali ne vjerujem to."

Naime, u većini jezika reportativni evidencijal ili sličan evidencijal o informaciji koja je iz druge ruke obvezuje govornika na barem mogućnost da je sadržaj iskaza istinit.

Givón [76, str. 24] donosi slučaj Lame koji priča *Život Buddhe* rabeći ekskluzivno indirektni evidencijal koji označava prijenos informacija iz druge ruke. Premda budisti tu priču smatraju najistinitijom o svih istina i sam narator vjeruje da je istina, nema direktni dokaz za to te mora rabiti indirektni evidencijal, primjerice u jeziku šerpa:[80]

(52) sangye čumden-dye-ki yum goŋ-pa-zoo-**no**
Buddha Sakya-muni-GEN majka misliti-završiti-PERF-EVID
"Buddha-Sakyamunijeva majka umrla je."

Rečenice s evidencijalima, kako smo vidjeli, nisu automatski istinite, čak ni kad se radi o evidencijalima s visokim stupnjem sigurnosti. Naime, čak i percepcija može prevariti čovjeka, stoga je potpuno normalno izreći čudne mooreovske rečenice, koje opet nisu kontradikcija. Ako jezik ima kategoriju evidencijala, rečenice u takvim jezicima mogu biti neistinite na dva načina: bilo da je postavljen pogrešni evidencijal, a iskaz je istinit, bilo da je iskaz neistinit, a evidencijal je točan. Neki su evidencijali ipak jači od drugih, odnosno obično će evidencijali vezani uz percepciju biti jači od onih, primjerice, o informaciji iz druge ruke, stoga se u podosta evidencijalnih jezika informacija iz druge ruke može negirati, a da ta rečenica ne zvuči negramatično ili čudno.

S jedne strane evidencijalnost se može shvatiti kao podskup epistemičke modalnosti, koja doista pridonosi istinitosnoj vrijednosti rečenice, ali češća je lingvistička tradicija u kojoj oni funkcioniraju kao modifikatori govornih činova jer ne pridonose istinitosti evidencijalne rečenice. Primjerice, Faller [54] smatra da u cuzco-kečui evidencijali signalizacijom izvora informacije modificiraju govorni čin uz uvjet iskrenosti, a slično tvrdi i Murray [117] za čejenski.

[80] Šerpa je sinotibetski jezik unutar tibetske porodice, a govori ga oko 170 000 govornika u Nepalu te u indijskoj državi Sikkim [1].

4.4 Evidencijali i pragmatika

4.4.1 Evidencijalnost i propozicijski stavovi

Propozicijski stav kao mentalno stanje činitelja ili govornika prema propoziciji obično se u indoeuropskim jezicima kodira s "da", odnosno engl. *that*, npr. *Virna vjeruje da je dobro napisala rad*, a propozicije su istinite ili neistinite iz perspektive samoga govornika. Frege je smatrao kako riječi koje obuhvaća glagol propozicijskoga stava ne funkcioniraju jednako kao što funkcioniraju izvan takvih okolina. Odnosno, točni propozicijski stavovi moraju indicirati način na koji su pojedinci reprezentirani od činitelja. Primjerice, *Lois vjeruje da je Superman jak* istinito je, ali ne i *Lois vjeruje da je Clark Kent jak* [112].

Nastavljajući se na de Haanovu [43] eksplicitnu funkciju evidencijalnosti koja odbija prihvatiti odgovornost za istinitost iskaza, smatramo da je interpretacija u obliku propozicijskoga stava – odnosno u okviru modifikacije govornih činova – pogodna analiza evidencijalnosti u pragmatičkom kontekstu. To će vrijedi i u specifičnim situacijama budućih sustava kad ćemo definirati pojmove znanja i vjerovanja preko evidencijala kao opravdanja: čak i ako govornik misli da nešto zna, to doista ne mora biti slučaj, te evidencijalne rečenice na neki način možemo gledati kao specifičnu vrstu propozicijskih stavova.[81] Međutim, u logičkoj formalizaciji specificirat ćemo opravdanja u različite vrste kako bismo mogli vidjeti kakve kombinacije opravdanja ili vrste opravdanja doista mogu dovesti do istine.

Tipološki se obično govori da sama evidencija ne pridonosi istinitosnoj vrijednosti rečenice, nego samo govore o tipu evidencije. Međutim, neki evidencijali doista tipološki govore o sigurnosti i bliski su epistemičkim modalima. U tibetskom evidencijali mogu biti u asertivnim kontekstima kod glagola govorenja i mišljenja i potom dobivaju subjektno-orijentiranu interpretaciju [137, str. 208]:

(53) yang.chen dge.rgan **red**
Yangchen učitelj EVID
"Yangchen je učitelj [zaključujem/netko mi je rekao]."

[81] Za tipične probleme propozicijskih stavova. v. [51].

(54)

bkra.shis	kho	ge.rgan	**red**	bsam-gi-**'dug**
Tashi	on	učitelj	EVID	misliti-PART-EVID

"Tashi misli da je on učitelj [zaključuje/netko mu je rekao]."

Neki istraživači kao Izvorski [93] i Garrett [69] smatraju kako su indirektni evidencijali zapravo epistemički modali. Primjerice, DeLancey [69, prema str. 36] smatra da različiti evidencijali indiciraju da govornik ima znanje različitih karika u kauzalnom lancu, a ako se rabi indirektni evidencijal, implicira se da ne postoji direktna evidencija za bilo koju kariku u lancu. Međutim, znanje koje se prezentira i dalje je prezentirano kao sigurno znanje te primjeri poput sljedećega pokazuju kako se ne implicira da postoji bilo kakav niži stupanj posvećenosti izraženoj propoziciji [69, str. 38]:

(55)

kho	phyin-**pa-red**	yin-na'i	phyin-**pa-red**	bsam-**gi-med**
on	ići-PERF.EVID	ali	ići-PERF.EVID	misliti-EVID

"Otišao je [znam indirektno], ali ne mislim da doista jest."

U pragmatičkom kontekstu neki bi se evidencijali poput indirektnih tibetskih evidencijala doista i mogli gledati kao da imaju snagu epistemičkih modala, odnosno da su bliski propozicijskim stavovima. Garrett [69, str. 48] to opravdava na temelju toga što se ne radi o neposrednom doživljaju evidencije nego o zaključivanju na temelju mreže činjenica, kao što je u slučajevima zaključivanja ili informacija iz druge ruke.

Konačno, povezanost s propozicijskim stavovima prvenstveno ovisi o definiciji evidencijalnosti kao kategorije. Ako evidencijale gledamo kao podskup epistemičkih modala, u smislu bilo kakvoga tipa dokaza ili pouzdanosti za tvrdnju, možemo ih interpretirati kao propozicijske stavove prema tvrdnjama na koje su dodani. Ako pak na evidencijale gledamo kao zasebnu kategoriju, govori se samo o izvoru dokazne građe i ne govori se ništa o vrednovanju tvrdnje. Međutim, evidencijali se u prirodnom jeziku u govoru rabe u pragmatičkom kontekstu i postavlja se pitanje mogu li doista evidencijali funkcionirati izvan takvoga konteksta ili ne. U gramatičko-tipološkim analizama evidencijali se obično definiraju u prvom kontekstu (npr. [5]), dok se u specifičnim pragmatičkim studijama obično povezuju s epistemičkim modalnostima i pragmatički-uvjetovanim kontekstualnim analizama (npr. [69] za tibetski ili [55] za cuzco-kečuu).

4.4.2 Evidencijalnost i performativnost

Zanimljivo je kako upravo u tibetskom Garret [69, str. 2017–217] izlaže da su evidencijali mogući u zavisnim rečenicama i frazama samo kod glagola govorenja (*lab* = "reći", *zer* = "izreći", *skad.cha dris* = "pitati") i mišljenja (*bsam* = "misliti", *yid.ches yod* = "vjerovati"), ali ne i s ostalim glagolima obično vezanim uz propozicijske stavove, primjerice *ha.go* = "znati", *thong* = "vidjeti" ili *re.ba* = "nadati se". Prvi je primjer stoga gramatičan, a drugi ne[82] [69, str. 211–212]:

(56) **bkra.shis-gis kho dge.rgan **yin** ha.go-**gi-yod.red**
Tashi-ERG on učitelj EVID misliti-EVID
"Tashi misli da je učitelj."

(57) bkra.shis kho dge.rgan **yin** bsam-**gi-'dug**
Tashi on učitelj EVID misliti-EVID
"Tashi zna da je učitelj."

Garret [69, str. 207] takvu situaciju opisuje iz performativnoga aspekta smatrajući da tibetski evidencijali imaju performativnu komponentu koja zahtijeva da su konteksti u kojima se rabe asertivni, što pružaju glagoli govorenja i mišljenja, ali ne i slični predikati.

Sauerland i Schenner [136, str. 526] zaključuju kako u tibetskom postoji evidencijalni pomak (*evidential shift*), odnosno posjedovatelj stava različit je od osobe koja evaluira dani evidencijal, kao u primjeru uporabe glagola mišljenja ili govorenja uz indirektni evidencijal (usp. tibetski primjer na str. 49). Takav se pomak uspoređuje s indeksikalnim pomakom, primjerice u engleskom jeziku[83] *I* uvijek referira na govornika trenutačnoga govornoga čina, no primjerice u amharskom[84] lična zamjenica prvoga lica jednine može označiti govornika stvarnoga govornoga čina ili govornika reportiranoga govornoga čina, pri čemu se indeksikal, odnosno lična zamjenica, nalazi u pomaku.[85] Takvu su situaciju

[82] Da bi drugi primjer bio gramatičan, morala bi se uporabiti čestica *yin-pa*, a ne ona egofornoga evidencijalnoga značenja.

[83] Dakako, ista je situacija i u hrvatskom jeziku.

[84] Etiopski semitski jezik afrazijske jezične porodice, s oko 22 milijuna govornika [1].

[85] Primjerice, u hrvatskom bismo rekli *Marija kaže da je bolesna* i *Marija kaže: "Bolesna sam"*. U prvom slučaju pridjevski predikat slaže se s trećim licem jednine, a u drugom slučaju direktni navod u prvom je licu jednine. Amharski bi prvu rečenicu slagao s prvim licem jednine.

autori analizirali i u bugarskom, koji je pod utjecajem turskoga jezika razvio neku vrstu evidencijalnosti, a za razliku od tibetskoga, nema pomaka u zavisnim kontekstima, no mogući su u predikatima iskazivanja i znanja općenito.

U tom svjetlu neke evidencijale možemo gledati kao skraćene propozicijske stavove s notom performativnosti. Primjerice, ako hipotetska rečenica *Tashi trči*-EVID. ima indirektni evidencijal koji označava zaključivanje, mogli bismo je preformulirati kao *Mislim da Tashi trči*, dok bismo rečenice s direktnim evidencijalima poput *Tashi trči*-DIR.EVID preformulirali kao *Čvrsto vjerujem da Tashi trči*, a čak i *Znam da Tashi trči*, s obzirom na to da se evidencijal vida u svim evidencijalnim jezicima smatra najpouzdanijim. To je slučaj i općenito u jezicima svijeta, gdje su glagoli vida i znanja vrlo često iz istoga korijena.[86]

4.5 Evidencijalna hijerarhizacija i snaga

S logičke strane posebice su zanimljivi inferencijalni evidencijali. Jezici poput tuyuke na inferencijalne evidencijale više gledaju kao na izvor informacije otuđen od govornika, odnosno zaključuje se iz kakvih tragova ili druge evidencije, dok jezici poput jezika pomo[87] stavljaju naglasak na zaključivanje iz percepcije. Primjerice, jezik hupa[88] ima četveročlani sustav: vizualni, nevizualni senzorni, zaključivanje iz evidencije te jače zaključivanje iz evidencije. Pritom se dva inferencijska evidencijala doista razlikuju po svojoj snazi [5, str. 53].

Barnes [28, str. 262] navodi kako su u južnoameričkom jeziku tuyuki vizualni evidencijali preferirani evidencijali te da nije bitno kakvu evidenciju govornik kasnije vidi ili kakvu informaciju dobije, vizualni evidencijal ostaje primarno sredstvo prenošenja informacije. Nakon toga slijede nevizualni evidencijali, koji su i dalje senzorni. Potom slijede aparentni evidencijali, gdje se zaključuje iz promotrenoga, iz percipiranoga iskustva ili tra-

86 Ta će veza detaljnije biti razrađena u opisu logike **EVL** na stranici 130.

87 Jezici pomo govore se u Kaliforniji, pri čemu su istočni, sjeveroistočni, sjeverni i središnji pomo vrlo ugroženi, dok su jugoistočni, južni i jugozapadni pomo ipak s malo više govornika [1].

88 Hupa je athapaskanski jezik sjeverozapadne Kalifornije, a 2015. postojao je jedan govornik, no 2007. postojalo je oko 30 govornika kojima je to bio drugi jezik [1].

gova/dokaza, zatim evidencijali iz druge ruke te naposljetku pretpostavljeni evidencijali, kad govornik nema nikakvih drugih informacija o stanju ili događaju [28, str. 262-264].

Hardman [84, str. 127] za jezike jaqi[89] donosi hijerarhijazaciju: *osobno znanje > znanje kroz jezik/inferencijalno znanje > neosobno znanje.* Za jezik kashaya[90] Oswalt [121, str. 43] donosi hijerarhizaciju *performativno > faktualno-vizualno > auditorno > inferencijalno > kvotativno.* Pritom je kvotativno zapravo drukčiji termin, a odnosi se na informacije iz druge ruke koje smo nazivali reportativnima, dok se performativno odnosi na sufiks kojim govornik zna o čemu govori jer je sam izvršio tu radnju ili je trenutačno izvršava.

Givón [76, str. 44] pouzdanost evidencije općenito rangira na sljedeći način:

- *govornik > slušatelj > treća osoba*
- *vizualno > auditorno > druga osjetila > osjećaj*
- *osjetila > inferencija*
- *blizu scene > dalje od scene.*

Kad bismo takvu hijerarhizaciju primijenili na evidencijale, značilo bi da direktni evidencijali bilo koje senzorne sposobnosti imaju jaču snagu od indirektnih evidencijala, bilo da su reportativni ili kvotativni, inferencijalni ili pretpostavljeni. Potom, unutar direktnih evidencijala vizualni bi evidencijal imao prednost nad auditornim, no s obzirom na to da ne postoje specifični evidencijali za ostala osjetila, takva nam je razlika dovoljna. Ako pak imamo jedan direktni evidencijal, koji uključuje vizualni i auditorni aspekt, onda on ima prednost nad indirektnim evidencijalima, ali i ostalim senzornim evidencijalima, ako postoji obilježeni ili neobilježeni marker za ostale. Općenito po prvoj gradaciji bilo kakvo iskustvo iz prve ruke jače je od bilo kakvoga iskustva iz druge ruke, tako da bi na taj način i govornikovo zaključivanje bilo jače od onoga što bi mu drugi mogli reći. Kako u hupi postoji inferencijalna snaga, zasigurno bi i zaključivanje iz vidljivih dokaza bilo jače od zaključivanja na temelju abdukcije ili pretpostavke. Pitanje samoga iskonskoga logičkoga zaključivanja ovisilo bi, dakako, i o empirističkom ili racionalističkom gledištu filozofske analize.

[89] Jezici jaqi ili aymaran jezična je porodica kod središnjih Anda [1].

[90] Kashaya je pomoanski jezik Kalifornije, kritično ugrožen, s dvadesetak govornika [1].

Vratimo li se na epistemološki aspekt opravdanja, Willett [162] već opisuje da su takve skale neke vrste skala pouzdanosti, čime hijerarhizaciju evidencijalne skale možemo gledati i iz epistemološke pozicije reliabilizma: iskaz određen evidencijalom bit će onoliko pouzdan koliko je pouzdan evidencijal. U reliabilizmu su pouzdana vjerovanja proizvedena pouzdanim procesima zamjećivanja, pamćenja ili zaključivanja, ali čini se kako su u jezicima svijeta zaključivanja ipak sekundarna u odnosu na zamjećivanje, pri čemu i unutar perceptivnih evidencijala vid ima prednost. Willett već sve izvore informacija u jezicima svijeta dijeli na svjedočene, reportativne i inferencijalne izvore, pri čemu se svjedočeni odnose na senzorne informacije, reportativni na informacije iz druge i treće ruke te folklor, a inferencijalni na zaključivanje govornika.

Faller [54], gledajući iz pragmatičke perspektive, donosi sljedeće implikacijske univerzalije[91] prema de Haanovu radu:

- ako jezik ima vizualni evidencijal, on je primaran
- ako jezik ima nevizualni evidencijal i inferencijalni evidencijal, nevizualni je jači od inferencijalnoga
- ako jezik ima auditorni evidencijal i inferencijalni evidencijal kojim se zaključuje iz senzornoga iskustva, onda je auditorni jači od inferencijalnoga senzornoga evidencijala
- ako jezik ima inferencijalni evidencijal bilo koje vrste i reportativni evidencijal, inferencijalni će biti jači od reportativnoga.

Takva hijerarhija ide u dvama smjerovima:

- *vizualni* > *nevizualni* > *inferencijalni* > *reportativni*
- *vizualni* > *auditorni* > *inferencijalni senzorni* > *reportativni.*

Faller [54] smatra da je problem tražiti univerzalnu hijerarhizaciju snaga zbog različitosti koncepata u jezicima te predlaže nelinearnu hijerarhiju:

- *vizualni* > *iz druge ruke* > *iz treće ruke* > *pretpostavljeni*
- *vizualni* > *auditorni* > *drugi senzorni* > *inferencijalni senzorni* > *inferencijalni* > *pretpostavljeni.*

[91] Zaključci tipa: ako kakav jezik ima kakvu strukturu ili osobinu p, onda mora imati i q.

Takva je relacija usmjerena na direktnosti. U prvoj putanji radi se o broju upletenih govornika, a u drugom slučaju o količini zaključivanja potrebno da se dođe do zaključka prenesenoga iskazom.

Su, Huang i Chen [147] inkorporirali su evidencijale s modalima kako bi pokušali istrenirati modele strojnoga učenja da prepoznaju etape vjerodostojnosti teksta. Međutim, problem je što ti autori ne razlikuju epistemičku modalnost od evidencijalnosti, odnosno tvrde da je evidencijalnost semantička kategorija koja se može izraziti gramatički i leksički, kao u engleskom ili kineskom [147, str. 12], što je lingvistički potpuno netočno jer je kategorija evidencijalnosti nužno gramatikalizirana. Međutim, pokušali su na temelju engleskih modalnih leksema hijerarhizirati "evidencijalnost" na četiri skupine:

- apsolutna vjerodostojnost: *certainly, sure, of course, definitely, absolutely, undoubtedly, report, certain, definite*
- visoka vjerodostojnost: *clearly, obviously, apparently, really, always, believe, see, must*
- srednja vjerodostojnost: *seemingly, probably, seem, think, sound, ought, should, would, could, can, possible, likely, unlikely, probable, positive, potential*
- niska vjerodostojnost: *maybe, personally, perhaps, possibly, presumably, doubt, wish, wonder, infer, assume, forecast, fell, heard, may, might, not sure, doubtful.*

Tomu bi odgovarala određena gruba gradacija u kojoj je na prvom mjestu neka vrsta inerencijalnoga evidencijala, za visoku vjerodostojnost neka vrsta senzornoga ili inferencijalnoga evidencijala, za srednju vjerodostojnost neka vrsta epistemičnoga modala ili slabijega inferencijalnoga evidencijala, a za nisku vjerodostojnost slabi epistemički modali. Postoje razne nijanse inferencijalnih evidencijala, bilo da se radi o zaključivanju iz iskustva, o deduktivnom zaključivanju, o očitim istinama ili o znanju grupe ili općem znanju, tako bi u ovoj hijerarhizaciji – kad bi se doista radilo o evidencijalima – i razni inferencijalni evidencijali našli svoje mjesto. Međutim, problem je što različite vrste riječi gledaju kao da su različite snage, primjerice pridjev *possible* nije u istoj kategoriji kao prilog *possibly*, dok postaviti zaključivanje na zadnju stubu vjerodostojnosti i iz lingvističkoga i iz logičkoga aspekta čini se potpuno neprihvatljivim.

U lingvistici su Berlin i Kay [29] uspostavili implikacijske univerzalije za jezike što se tiče leksema za boje: ako jezik razlikuje neke boje, to će biti tamna i svijetla, odnosno crna i bijela, a potom dolaze redom ostale boje: crvena, zatim zelena ili žuta, potom plava, zatim smeđa, te na kraju ljubičasta, ružičasta, narančasta ili siva. Takva je klasifikacija bila s vremenom oslabljena, no predložila je put u istraživanju ne samo lingvističkih univerzalija nego i implikacijskih univerzalija i hijerarhizacija. Gotovo pa sva istraživanja hijerarhizacije kreću prvo od najjednostavnijih dvočlanih sustava, stoga smatramo da bismo i u istraživanju evidencijala trebali vidjeti bitnu konceptualnu stvar: ako jezik doista razlikuje neke evidencijale, koje su mu razlike najrelevantnije. Ta će razlika biti iznimno bitna, ako se u opreci radi o obilježenoj[92] vrsti evidencijala, za razliku od svega drugoga što je neobilježeno. Sličan smo primjer imali i u čejenskom (str. 45), gdje je neobilježenost riječi oznaka jedne vrste evidencijalnosti.

Vratimo li se na klasifikaciju dvočlanih evidencijalnih sustava, vrlo će česta biti opreka između obilježenoga evidencijala i svega ostaloga [5, str. 25]:

- **A1.** iz prve ruke – ne iz prve ruke
- **A2**. iz druge ruke – sve ostalo (neobilježeno)
- **A3**. reportirano – sve ostalo (neobilježeno)
- **A4**. senzorna evidencija – reportirano
- **A5**. auditorno – sve ostalo (neobilježeno).

U sustavu **A1** primarna je informacija iz osjetila, prvenstveno iz vida, dok je u sustavu **A2** vid taj koji je neobilježen i u evidencijalnost druge ruke ulaze informacije drugih osjetila, ali i reportativnost te inferencijalnost, pri čemu se razlike vide ponajviše u kontekstu. U nekim jezicima naglašava se zaključivanje i druga ruka više nego senzorna informacija, primjerice u jeziku hare[93] [5, str. 31], što nas dovodi do toga da je u takvim jezicima bitno istaknuti nesigurniju informaciju od vida. Tomu je sličan i sustav **A3**, koji je vrlo čest u jezicima svijeta, gdje se obilježava da je informacija iz druge ruke, odnosno opet se naglašava neizravnost dokaza. Sustav **A4** kao da kombinira prethodne sustave te ima obilježeno senzorno, ali i obilježeno iskustvo iz druge ruke. Sustav **A5** vrlo je atipičan i nalazi se samo u jeziku yuchi i postoje brojne teorije postojanja takva sustava, a moguće je da se s vremenom radilo o drastičnoj redukciji evidencijalnoga sustava zbog umiranja toga jezika [5, str. 37], stoga je najbolje izostaviti ga iz daljnje analize.

---

[92] Obilježenost ili markiranost označava da se riječi dodaje kakav afiks ili se mijenja na neki način da bi joj se promijenilo značenje, dok je neobilježena uporaba normalna.

[93] Hare je dijalekt jezika slavey ili slave, athapaskanskoga jezika u sjeverozapadnoj Kanadi, s oko 2000 govornika [1].

Razlikovanje sustava **A1**, **A2** i **A3** nije uvijek toliko jedostavno jer su granice često vrlo nejasne [5, str. 40], odnosno različiti interpretatori različito interpretiraju i klasificiraju jezike, a često je problem i oskudna dokumentacija. Aikhenvald [4] godinu dana prije svoje glavne klasifikacije uopće nije imala sustave **A4** i **A5**, a s obzirom na to da je sustav **A4** opet rijedak te se nalazi samo u trima spomenutim jezicima (ngiyambaa, diyari, wintu), dok je sustav **A5** samo u jeziku yuchi i već je isključen iz analize, prirodno se čini za polazište univerzalne hijerarhizacije uzeti samo prva tri sustava. Naime, što su jezici manje dokumentirani i s više promjena te su ugroženi, moguće je da im se evidencijalna kategorija s vremenom mijenjala. S obzirom na raširenost prethodnih triju sustava, a pogotovo **A3**, razumno je pretpostaviti njihovu primarnu ulogu u hijerarhizaciji evidencijalne snage. Pritom se u većini jezika mora obilježiti evidencijalom ako informacija nije iz prve ruke, odnosno ako je ili reportativna ili bilo kako inferencijalna.

Moguća bi hijerarhizacija bila sljedeća: *vizualno > iz druge ruke*, a s obzirom na višečlane sustave gdje je senzorna informacija uvijek relevantnija od nesenzorne, posebice ilustrirano spomenutim Barnesovim istraživanjem u tuyuki [28], hijerarhija bi bila: *vizualna informacija > informacija iz ostalih osjetila > informacija iz druge ruke*. S obzirom na primarnost senzornoga iskustva, zaključivanje iz senzornoga iskustva imalo bi primat nad deduktivnim zaključivanjem:

1. *vizualna informacija*
2. *informacija iz ostalih osjetila*
3. *zaključivanje iz osjetila*
4. *zaključivanje (iz dokaza)*
5. *reportativna informacija.*

Problem takve hijerarhije jest njezina općenitost i neće biti adekvatna za sve sustave, no vrlo dobro pokriva višečlane evidencijalne sustave. Naime, ako kakve kategorije nema, bitno je da očekujemo obilježenost ostatka. Sustavi **B1** (vizualni – inferencijalni – reportativni evidencijal) slijede hijerarhiju po redu, a nedostaje informacija iz drugih osjetila, dok u sustavima **B2** (vizualni – nevizualni senzorni – inferencijalni) nedostaje reportativni evidencijal, a u sustavima **B3** (vizualni – nevizualni senzorni – reportativni) nedostaje inferencijalni evidencijal. U sustavima **B4** nedostaje vizualni evidencijal, a u sustavima **B5** nedostaje sve prije reportativnoga evidencijala, no ovdje je obilježeno upravo naratívno iskustvo u nekolicini američkih indijanskih jezika, dok je neobilježeno sve ostalo, što odgovara hijerarhiji.

Analogno je i s višečlanim evidencijalnim sustavima, gdje i za npr. jezik tucano odgovara Barnesova hijerarhija: vizualno – nevizualno – inferencijalno (na temelju senzornoga iskustva) – reportativno – pretpostavljeno (na temelju općega zaključivanja). Pitanje je postaviti li generalnu pretpostavku ili opće zaključivanje na posljednje mjesto nakon informacija iz druge ruke ili odmah nakon zaključivanja iz osjetila, a naizgled se čini da dokazi iz jezika tuyuca i tucano govore u prilog prvoj hijerarhiji.

Istraživači poput Aikhenvald [6, str. 29] obično ističu primarnost vizualne evidencije, a inferencijalni evidencijal iz vizualne evidencije preferira se nad informacijom iz druge ruke. No, čini se kako je u evidencijalnim jezicima ipak bitno imati neku pretpostavku na kojoj se zaključuje, za koju imamo kakav dokaz, koji ne mora nužno biti vizualni, a iz logičke perspektive očekujemo zaključivanje na relativno čvrstoj pretpostavci, stoga i situacija u jezicima i logički aspekt upućuju nad primarnosti svake vrste zaključivanja nad pukim nagađanjima ili informacijama iz druge ruke.

Takvu hijerarhiju potvrđuju i brojni rubni primjeri u jezicima. Naime, proročki snovi svevidećih šamana imat će vizualni evidencijal (zbog njegove primatnosti i direktnosti), za razliku od snova običnih ljudi, gdje će takav evidencijal biti nevizualan. U jeziku tariana i drugim jezicima priče i legende pričaju se uz reportativni evidencijal, što pokazuje da njegova uporaba već govori o ne toliko čvrstim temeljima izvora informacije [6, str. 30].

Vrlo često u jezicima svijeta samo gramatičko lice, odnosno sebstvo govornika, ima vlastiti evidencijal, odnosno govornikov pristup vlastitim unutarnjim stanjima i osjećajima primarniji je od ostatka. Takav će sustav imati i standardni tibetski, o kojem će biti više riječi u idućem poglavlju.

4.6 Primjer i opis evidencijalnoga jezika: standardni tibetski

4.6.1 Tibetski evidencijalni sustav

Standardni tibetski modeliran je prema glavnomu dijalektu lhasa, stoga je često znan kao lhasa-tibetski.[94] Starotibetski je posvjedočen u rukopisima od 7. stoljeća nove ere, a "tibetskim" se obično nazivaju svi njegovi potomci. S obzirom na to da se ti potomci razlikuju kao što se razlikuju romanski jezici – nastali iz latinskoga – uvijek se ističe ime glavnoga dijalekta, tako da će "tibetski" zapravo uključivati standardni tibetski, dok će ostali potomci imati ili prefiks (npr. amdo-tibetski) ili svoj naziv (npr. šerpa ili khams).

U njemu se evidencijalnost razvila raznim dijakronijskim procesima, pri čemu je izvorna kopula postala evidencijalnim markerom (*'dug*), dok je egzistencijalna kopula postala oznakom za vizualni evidencijal [5, str. 284]. Tibetski jezici razlikuju tri vrste znanja [48, str. 4]:

- **egoforno**: osobno znanje, bilo samoevidentno govorniku ili iz percepcije
- **faktualno**: znanje koje ne zahtijeva dokaze, analogno pretpostavljenim evidencijalima ili zaključivanju na temelju općega ili grupnoga znanja
- **evidencijalno**: znanje koje zahtijeva dokazni status, na temelju senzorne informacije ili zaključivanja iz sekundarnih dokaza.

U tablici 3.1. naveden je pregled glagolskih evidencijalnih nastavaka u tibetskom. Naime, razlikuju se četiri vremena/aspekta i tri evidencijalna načina. Imperfektivne radnje odgovaraju prezentu i nesvršenosti, perfektivne radnje odgovaraju svršenosti i radnji s utjecajem na sadašnjost, dok su perfekatske radnje gotove i davno izvršene.

---

[94] Klasična gramatika kojom se koristimo jest Jäschkeova *A Short Practical Grammar of the Tibetan Language* [94].

aspekt/evidencijal	**egoforno**	**faktualno**	**evid. direktno**	**evid. indirektno**
perfektiv	-pa.yin	-pa.red	-song	-zhag
perfekt	-yod	-yog.red	-'dug	-zhag
imperfektiv	-gi.yod	-gi.yog.red	-gi.'dug ili -gis	
futur	-gi.yin	-gi.red	-gi.red	-gi.red

Tablica 4.1: Glagolski evidencijalni nastavci u tibetskom

(58) nga-'i nang bod-la **yod**
1.sg-GEN dom Tibet-LOC postojati.EVID
"Moj je dom u Tibetu."

(59) bod-la g.yag **yog.red**
Tibet-LOC jak postojati.EVID
"Ima jakova u Tibetu."

(60) bod-la moṭa mang.po **'dug**
Tibet-LOC automobil mnogo postojati.EVID
"Ima mnogo automobila u Tibetu."

Postoji mnogo istraživanja i prijepora oko toga jesu li sve ove kategorije evidencijalne, a egoforna kategorija na neki je način primarna i neovisna, premda se obično tretira kao dio evidencijalnoga sustava [48, str. 8], kakav će se pristup i ovdje primjenjivati vezan uz samopromatranje.

Pravim se evidencijalnim sustavom zapravo smatra podskup svih evidencijalnih nastavaka, odnosno tibetski perfektivni sustav [47, str. 210], jer ponaša se tipično kao u ostalim evidencijalnim jezicima svijeta, gdje je takva uporaba vrlo česta u prošlim vremenima:

(61) ŋa-s yige bri-**pa-yin**
ja-ERG pismo pisati-EVID
"Napisao sam pismo."

(62) k'oŋgis yige bri-**pa-red**
on(a) ERG pismo pisati-EVID
"Napisao/la je pismo [čini se]."

(63) k'oŋgis yige bri-**soŋ**
on(a) ERG pismo pisati-EVID
"Napisao/la je pismo [vidio sam da se to dogodilo]."

Premda DeLancey [47] tvrdi da govornik tibetskoga nikada ne bi upotrijebio evidencijalni direktni perfekatski sufiks u rečenici "ima jakova u Tibetu" nego samo faktualni sufiks, Hill [89, str. 49] to opovrgava sljedećim gramatičnim primjerom, gdje Tibetanac Dorje govori protiv lažne vijesti da su svi jakovi u Tibetu umrli. U tom primjeru Dorje zna da ima jakova iz osobnoga iskustva, iz općega znanja i iz senzornoga iskustva te stavlja evidencijal koji govori da ima izravnu percepcijsku evidenciju za iskaz (-*'dug*):[95]

(64) 'di bden-pa yin srid-**kyi-ma-red**
ova istina je moguća-NEG-EVID

bod-la da lta g.yag **'dug**
Tibet sad jak postojati.EVID

bdun-phrag sṇan-ma de-ga-raṇ-la g.yag gsum mthoṇ-byuṇ
jedan prošli tek baš tri vidjeti-PERF

"To je nemoguće. Ima jakova u Tibetu sada. Vidio sam tri baš prošli tjedan."

4.6.2 Inferencijalna evidencijalnost u tibetskom

Obično se u slučajevima zaključivanja rabi indirektni evidencijal: [38, str. 242]

(65) da gdan.gdan nga-tsho'i dkyil'la khyo-ka gcig slebs **yod.red**
sad sigurno mi-GEN sredina.LOC čovjek jedan stići EVID
"Dakle, sigurno je među nama čovjek koji je ovamo stigao."

Većina zaključaka skraćenoga je oblika, odnosno ne dobivamo sve premise, što je doista i adekvatno u klasičnom prirodnom jeziku. Međutim, nalazimo i primjere pravoga modusa ponensa. Primjerice, čovjek boluje od amnezije i vidi papire s dvama stupcima, s jedne je strane ime, s druge odredište putovanja. Čovjek zna da se zove Tashi i stoga zaključuje:

(66) bkra-shis New-York-la phyin-**pa-red**
Tashi New York-LOC ići-EVID

nga bkra.shis **yin**
ja Tashi EVID

[95] *-kyi* i *-gi* varijante su istoga morfema.

byas.tsang nga New-York-la phyin-**pa-red**
dakle ja New York-LOC ići-EVID

"Dakle, ja sam išao u New York."

U izravnom zaključivanju govornik nikako ne može upotrijebiti afiks **-pa-yin* nego samo *-pa-red*, zato što se premda govornik zna da je otišao faktualno, premda zna egoforno da je on Tashi, nikako ne može egoforno znati da je on sam otišao u New York, nego samo faktualno inferencijalno [69, str. 41].

Sličan primjer nalazi se u dijasporskom tibetskom [38, str. 242], koji se govori izvan Tibeta, u rečenicama tipa *Tvoj je stariji brat viši od tebe. Moj je otac viši od mojega starijega brata. Dakle, tvoj je otac viši od tebe*, pri čemu se na zadnjem zaključivanju stavlja evidencijalna kombinacija *-yo-sa-re* koja označava da se radi o zaključivanju, ali da nije posve sigurno, jer propozicija nije verficirana.

(67) c^{h}ȫʔ-gi tʃdʒö c^{h}ȫ-le̱ ri̱ŋan **yö̱-re̱ʔ**
2.sg-GEN stariji brat 2.sg-COMP viši EVID
"Tvoj je stariji brat viši od tebe."

nye̱: āpa nye: tʃdʒö-ḻe ri̱ŋan **yö̱-re̱ʔ**
1.sg.-GEN otac 1.sg.GEN stariji brat-COMP viši EVID

"Moj je otac viši od mojega starijega brata."

āpa ya̱ŋ c^{h}ȫʔ-le̱ ri̱ŋan **yö̱-sā-re̱ʔ**
otac također 2.sg-COMP viši EVID

"Dakle, tvoj je otac također viši od tebe (zaključujem)."

Za irealno zaključivanje obično se rabe faktualni inferencijalni evidencijali: [69, str. 46]

(68) mdangs.dgong gangs rgyab med-na
sinoć snježiti NEG-ako

ta.lta nga las.khung-la **yod-red**
sad ja ured-LOC EVID

"Da nije snježilo sinoć, sad bih bio u uredu."

U slučaju skraćenih zaključaka prva je rečenica temelj zaključivanja za drugu, a tu se obično rabi direktni evidencijal *-'dug* ili njegovi analogoni po vremenima, s obzirom na to da u takvom zaključivanju moramo imati kakav specifičan dokaz i općenite tvrdnje ne mogu biti razlog za posebne neposredne radnje [69, str. 176]:

(69) nga dal.ta grod.khog ltogs-**gi-'dug**
ja sad trbuh gladovati-EVID

byas-tsang nga kha.lag za-**gi-yin**
dakle ja hrana jesti-EVID

"Gladan sam. Dakle, jest ću."

Općenito, glavni inferencijalni evidencijali jesu *-bzhag/shag/zhag* i spomenuti *-'dug*, pri čemu se *(b)zhag* obično rabi za inferencijalni prezentski perfekt, a katkad i *'adug* za senzorni inferencijalni prezentski perfekt [158, str. 117]:

(70) khong-gis deb bltas-**bzhag**
on-ERG knjiga čitati.PAS-EVID
"Čitala je knjigu [nije ovdje, ali vidim knjigu na njezinu stolu]."

U ulozi evidencijala dolaze i brojni afiksi i čestice, koji se kombiniraju s evidencijalima i bolje nijansiraju značenje, primjerice uz opće zaključivanje općenito će doći *-yod-kyi-red*, dok će uz zaključivanje iz konkretnoga dokaza doći *-yod-sa-red* [95]. Primjerice: [158, str. 119], mogu se razlikovati različite vrste zaključivanja, senzorno i logičko:

(71) khong-la dga'.rogs **yod-pa-'dra**
on/a ljubavnik EVID
"Ima momka ["čini se", govornik je često vidi s istom osobom]."

(72) khong-la dga'.rogs **yod-'gro**
on/a ljubavnik EVID
"Ima momka ["vjerojatno", ima 20 godina i govornik pretpostavlja da je normalno da ima momka]."

Razlika može biti na temelju zaključivanja iz osobnoga iskustva, vlastitoga senzornoga iskustva te grupnoga znanja [46, str. 65-66]:

(73) ṅas thaṅ-kha bkal-**yod**
ja-ERG Thangka vješati-EVID
"Objesio sam thangku [znam to osobno]."[96]

(74) ṅas thaṅ-kha bkal-**yod-pa-red**
ja-ERG Thangka vješati-EVID
"Objesio sam thangku [ljudi znaju]."

(75) ṅas thaṅ-kha bkal-**bzag**
ja-ERG Thangka vješati-EVID
"Objesio sam thangku [vidio sam]."

Zanimljivo je i da pri usvajanju jezika tibetska djeca vrlo rano usvoje egoforne i izravne evidencijale, dok razumijevanje neizravnih evidencijala dolazi kasnije. Naime, zaključivanje je kompleksan proces i stoga će evidencijali vezani uz zaključivanje i biti usvojeni mnogo kasnije, što su pokazali de Villiers i Garfield u [45].

4.6.3 Interpretacija evidencijalnosti u tibetskom

Garrett [69, str. 116] u opsežnoj studiji o evidencijalnosti i asertivnosti u tibetskom navodi kako egoforni evidencijal dolazi automatski u nedostatku indirektnoga ili direktnoga evidencijalnoga označavanja, odnosno označava direktno znanje koje nije posredovano ni percepcijom niti zaključivanjem. U usporedbi s logikom opravdanja, tako bi mogli biti opravdani aksiomi, s obzirom na to da se radi o posebnoj vrsti opravdanja za govornika, koja je neposredna i, na neki način, intuitivna.

Preostaju nam faktualni evidencijali, koji označavaju obično ili opće znanje ili zaključivanje iz poznatih činjenica, za razliku od inferencijalnih evidencija, koji označavaju zaključivanje iz vidljivih dokaza, te direktnih evidencijala, koji se odnose na senzornu percepciju. Neki istraživači (npr. [89]) tibetske evidencijale doista i dijele samo na tri dijela, no s logičke strane bolja bi bila podjela isto tako na tri dijela, ali s drukčijom raspodjelom: egoforni – indirektni (inferencijalni i faktualni) – direktni (senzorni). Vokurková [158, str. 46] smatra da se tibetski može usporediti s jezikom tuyuca i da zapravo ima, analogno Willetovoj [162] klasifikaciji, pet vrsta evidencijala: egoforni, svjedočeni/senzorni, inferencijalni, faktualni asertivni i reportativni. Međutim, tih se pet vrsta doista da svesti

[96] Thangka je tibetska budistička slika na platnu ili svili.

na tri glavne spomenute: egoforni, inferencijalni, izravni. Garrett [69, str. 209] smatra da se radi o trinarnom sustavu – egoforni, direktni, indirektni – a ne o binarnom. Na temelju toga tvrdi sljedeću hijerarhiju iz pragmatičkoga aspekta: *egofornost* $>$ *direktnost* $>$ *indirektnost* [69, str. 41].

U svojoj seminalnoj studiji [5] Aikhenvald uopće ne spominje tibetski u klasifikacijama višečlanosti, prvenstveno zato što je egoforni evidencijal tibetske skupine jezika dosta unikatan. Generalizirano gledajući odnos između direktnoga, indirektnoga i egofornoga evidencijala svrstao bi se u tročlane evidencijalne sustave, gdje bi opreka bila smislenija po našoj raspodjeli: egoforni – inferencijalni (faktualni i senzorni inferencijalni) – senzorni. Ako bismo detaljno gledali, tibetski bi bio blizu i četveročlanim sustavima, gdje se često rabe pretpostavljeni evidencijali, kojima se služi u govorenju o općem znanju ili o deduktivnom zaključivanju. Garrett [69, str. 62] povezuje egoforni evidencijal s direktnim evidencijalima na temelju demonstrativnosti te ga ne smatra fundamentalno različitim od direktnih evidencijala, što je analogno našoj interpretaciji egofornoga evidencijala kao (direktnih) opravdanja za aksiome.

Predlažu se dvije klasifikacije, logička i lingvistička, pri čemu u logičkom aspektu nije toliko relevantna vrsta zaključivanja, koliko sama narav da to jest zaključivanje, dok u lingvističkoj tipologiji, s obzirom na velik broj jezika svijeta koji doista razlikuju zaključivanje iz direktnoga iskustva ili dokaza od induktivnoga ili deduktivnoga zaključivanja općega tipa, ima smisla ostaviti razliku. Egoforni evidencijal zapravo i nije prava vrsta evidencijala i obuhvaća i indirektne i direktne evidencijale (premda je bliži direktnima zbog neposrednoga z nanja), samo što se odnose na samoga govornika, stoga se u elementarnoj klasifikaciji i egoforni evidencijal može gledati kao kombinacija direktnih i indirektnih evidencijala jednoga govornika:

- lingvistička klasifikacija: *egoforni – inferencijalni senzorni – inferencijalni pretpostavljeni – senzorni*
- logička klasifikacija: *egoforni – inferencijalni (indirektni) – senzorni (direktni*) ili *indirektni – direktni.*

Poglavlje 5

Evidencijalna logika

5.1 Uvod

Opravdanje je važan predmet proučavanja epistemologije, što smo vidjeli u potpoglavlju 2.1, gdje se teorije opravdanja fokusiraju na različite uvjete pod kojima je kakvo vjerovanje opravdano. Neke teorije ulaze u pitanje naravi samoga opravdanja (kao internalizam i eksternalizam), dok se neke, poput evidencijalizma, bave samo postojanjem opravdanja. Međutim, pitanje opravdanje nije aktualno samo u epistemologiji nego i u logici, počevši od različitih logika dokaza pa sve do logika opravdanja, koje se potpuno fokusiraju upravo na opravdanje, a ne na mnogo uži pojam dokaza, što smo vidjeli u potpoglavlju 2.2. Analizom evidencijalnih jezika – jezika u kojima je postojanje dokazne građe za kakvu propoziciju gramatikalizirano i često obligatorno – ustvrdili smo kako je pojam opravdanja bitan i u prirodnom jeziku, odnosno u lingvističkom opisu takvih jezika. Cilj je nove logike pokazati kako se i prirodni jezici s kategorijom evidencijalnosti mogu opisati i logički te vidjeti kako takav opis može uključiti i pitanje ne samo postojanja opravdanja nego i njegove naravi.

5.2 Ciljevi i pozadina evidencijalne logike

Evidencijalna logika **EVL** naslanja se na logiku opravdanja i njezino je proširenje. Razlikujemo tri evidencijalne logike: $\mathbf{EVL}^-$, **EVL** i $\mathbf{EVL}^+$, odnosno na logiku opravdanja, logiku evidencijalnih jezika i logiku jednoga evidencijalnoga jezika – tibetskoga.

Prva logika – $\mathbf{EVL}^-$ (potpoglavlje 5.3) – bit će proširena logika opravdanja u koju je dodano razlikovanje znanjotvornih i prihvaćenih opravdanja (usp. str. 28). Želimo pokazati kako je za vjerovanje dovoljno da govornik prihvati neko opravdanje, dok za znanje ono mora biti i u skupu znanjotvornih opravdanja. Na taj način definirat ćemo i pojmove znanja i vjerovanja te aksiome epistemične i doksastične logike izvesti kao teoreme sustava baziranoga na opravdanju.

Drugi je korak primjena na same evidencijalne jezike općenito, koji općenito razlikuju direktna i indirektna opravdanja. Ovaj sustav – logika **EVL** (potpoglavlje 5.4) – opći je sustav evidencijalnih jezika i gradi se na bazi logike $\mathbf{EVL}^-$ te mu se dodaje razlikovanje skupova direktnih i indirektnih opravdanja, odnosno u formalizaciji adekvatnih predikata koji opisuju vrstu opravdanja. U direktna opravdanja spadaju senzorna opravdanja, dok u indirektna ulazi zaključivanje i reportativna informacija iz druge ruke. Pokazat ćemo kako su direktna opravdanja faktivna i vode do znanja, dok kod indirektnih to nije uvijek slučaj. Sva opravdanja vodit će do vjerovanja, no govornik ne mora prihvaćati svako opravdanje, primjerice govornik ne mora prihvatiti reportativno opravdanje kao relevantno, premda ono postoji.

Spomenuli smo kako se pojedini evidencijali vrednuju hijerarhijski, pri čemu su direktni evidencijali primarni, za razliku od indirektnih evidencijala. Primarna je motivacija primijeniti hijerarhizaciju evidencijalne snage u zaključivanju te pokazati kako su direktna opravdanja jača od indirektnih opravdanja. Shodno tomu u trećoj logici – $\mathbf{EVL}^+$ (potpoglavlje 5.5) – koja se nastavlja na logiku **EVL**, uvodimo dodatni dvomjesni predikat koji govori o jačini direktnih opravdanja nad indirektnima. Takav se predikat može prilagoditi i bilo kojemu drugomu evidencijalnomu jeziku, čak i u slučaju više vrsta opravdanja, pri čemu može, shodno klasifikaciji evidencijalnih sustava, biti čak i peteromjestan.

Slijedit ćemo našu izvedenu hijerarhiju u kojoj su direktna opravdanja jače evidencijale snage od indirektnih opravdanja:

1. *vizualna informacija*
2. *informacija iz ostalih osjetila*
3. *zaključivanje iz osjetila*
4. *zaključivanje (iz dokaza)*
5. *reportativna informacija.*

U standardnom tibetskom pak postoji egoforni evidencijal, koji nije evidencijal u punom smislu. On može poprimiti obilježja i direktnih i indirektnih evidencijala, a odnosi se na osobna iskustva samoga govornika te je na neki način između direktnosti i indirektnosti. Podsjetimo se tibetskih evidencijala:

- lingvistička klasifikacija: inferencijalni senzorni – inferencijalni pretpostavljeni – senzorni – egoforni
- logička klasifikacija: inferencijalni (indirektni) – senzorni (direktni) – egoforni (direktni za aksiome).

Poopćavanjem se evidencijali iz osjetila (vizualno i ostalo) svode na direktna opravdanja, a sve ostalo na indirektna opravdanja. Egofornost u tibetskom obično se odnosi na direktnu spoznaju govornika te takvu vrstu evidencijala smatramo blisku opravdanju za aksiome, odnosno naše će opravdavajuće konstante biti analogon tibetskom egofornom evidencijalu.

Osnovni sustav logike $\mathbf{EVL}^-$ služi nam za sve jezike s nekom vrstom opravdanja, ne nužno gramatikalizirana opravdanja, jer lako se da primijeniti i na epistemičku modalnost ako je izražena u rečenici. Razlikovanje direktnih i indirektnih opravdanja u logici $\mathbf{EVL}$ ipak slijedi evidencijalnu podjelu (poglavlje 4.2 na str. 37), odnosno poopćenje svih evidencijalnih sustava na temeljni $\mathbf{A}$-sustav s oprekom direktnih i indirektnih evidencijala, na što je upućeno i u poglavlju o hijerarhiji (poglavlje 4.5 na str. 52). U takvim jezicima inferencijalni evidencijali indirektni su te se zaključivanje smatra indirektnim opravdanjem u većini jezika. Treća logika $\mathbf{EVL}^+$ upravo je logika bazirana po uzoru na tibetski jezik, gdje su direktna opravdanja veće evidencijske snage od indirektnih opravdanja, a zadržana je inferencijalnost evidencije zajednička mnogim evidencijalnim jezicima.

5.3 Logika EVL$^-$

5.3.1 Osnovne postavke logike EVL$^-$

Formalni okvir za logiku **EVL**$^-$ nastao je na temelju Artemovljeva [19, str. 4] modela u kojem unutar jednostavne logike opravdanja s opravdavajućim pandanom modalnoga aksioma **K** uvodi razlikovanje između opravdanja koja proizvode znanje (*knowledge-producing justifications*), odnosno znanjotvornih opravdanja, i prihvaćenih opravdanja (*accepted justifications*). Takav odmak od klasičnih fittingovskih i mkrtychevskih modela čini se adekvatan da izrazi evidenciju u evidencijalnim jezicima, jer cilj nam je pokazati kako se iz različitih vrsta opravdanja mogu izvesti i ostali epistemički pojmovi kao što su znanje i vjerovanje.

Od Artemova [19], [20] preuzimamo ideju skupova prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja. Artemovljeva je logika također iskazna te je $t{:}F$ atomarno, a osnovni model sadržava dva disjunktna skupa sintaktičkih objekata: skup opravdavajućih oznaka (Tm) i skup formula (Fm) pridruženih tim opravdavajućim oznakama. Naša je logika prvoga reda i kvantificira se nad opravdanjima, ne nad opravdavajućim oznakama. Naime, želimo da su nam u domeni sama opravdanja, odnosno ono što je označeno opravdavajućim oznakama tipa $t, s \ldots$ itd. Smatramo da u prirodnom jeziku svaki predmet može postati evidencijom, odnosno sve može biti evidencija za kakvu tvrdnju, a analogno tomu i dio kakvoga gramatikaliziranoga evidencijala (primjerice zaključivanje iz kakvoga predmeta).

Takav osnovni sustav može se primijeniti za bilo koji jezik koji ne mora nužno imati gramatikaliziranu evidencijalnost nego gramatičku modalnost (v. poglavlje 4.1 na str. 32). Razlikovanjem direktnih i indirektnih opravdanja u sljedećoj logici dobit ćemo adekvatni opis evidencijalnih jezika.

Postupno se kreće od standardnih aksioma logike opravdanja, koji su realizirani analogoni klasične modalne logike, uvode se novi opravdavajući aksiomi te se uvode i operatori K i B koji se definiraju opravdanjima. Za vjerovanje su takva opravdanja dio skupa prihvaćenih opravdanja, a za znanje su usto i dio skupa znanjotvornih opravdanja.

Klasični aksiomi epistemične i doksastične logike dokazani su kao teoremi ovoga sustava te se za sam sustav logike opravdanja prvoga reda dokazuje da je potpun i pouzdan.

5.3.2 Sintaksa i formalni sustav logike $\mathbf{EVL}^-$

Definicija 1 (Rječnik jezika logike $\mathbf{EVL}^-$)**.** Jezik evidencijalne logike nazvat ćemo $\mathcal{L}_{EVL^-}$. Rječnik jezika $\mathcal{L}_{EVL^-}$ sastoji se od:

- simbola klasične logike prvoga reda bez predikatskih slova, uključujući iskazna slova, kvantifikatorske simbole, booleovske poveznike i zagrade
- prebrojivo mnogo varijabli $x, y, z, x_1, y_1, \ldots$ i konstante c
- opravdavajućih funkcijskih simbola: monadnoga $!$ i binarnih $\cdot$ i $+$
- simbola $_A$, $_E$ i $:$.

Skup konstanti označavamo kao Con, skup iskaznih slova $Prop$, a skup varijabli Var.

Definicija 2 (Opravdavajuće oznake u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Opravdavajuće oznake (*justification term*) jesu ili varijable $(x, y, z, x_1, y_1, \ldots)$, ili konstanta (c), ili sastavljene opravdavajuće oznake, koje nastaju binarnim operacijama primjene (aplikacije) $\cdot$, zbroja (sume) $+$ te provjerivača dokaza $!$:

$$t ::= x \mid c \mid t_1 \cdot t_2 \mid t_1 + t_2 \mid !t.$$

Skup opravdavajućih oznaka označavamo kao Tm, a skup formula Fm.[97]

Definicija 3 (Formula u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Formula u logici $\mathbf{EVL}^-$ definira se kao u klasičnoj iskaznoj logici uz dodatna pravila: ako je t opravdavajući polinom, a F formula, onda: 1) $t{:}F$ je formula 2) $t{:}_A F$ je formula, 3) $t{:}_E F$ je formula, 4) $\exists x F$ je formula, 5) $\forall x F$ je formula. Formulu oblika $t{:}F$ nazivamo opravdavajućom formulom, dok je samo t opravdavajuća oznaka.

$$F ::= S \mid F_1 \to F_2 \mid F_1 \wedge F_2 \mid F_1 \vee F_2 \mid \neg F \mid t{:}F \mid t{:}_A F \mid t{:}_E F \mid \exists x F \mid \forall x F.$$

[97] Dva disjunktivna skupa izraza Tm i Fm rabe se u Artemova [19], [20], pri čemu Fm ne sadržava formule oblika $t{:}_A F$ i $t{:}_E F$. U osnovnom Artemovljevu modelu formule tipa $t{:}F$ tretiraju se kao atomi.

Pritom je S iskazno slovo, $S \in Prop$. Simboli $_A$ i $_E$ označavaju da se opravdanje za neku formulu nalazi u skupu prihvaćenih opravdanja ili u skupu znanjotvornih opravdanja. Definicijama će se uvesti još i formule oblika KF i BF za znanje i vjerovanje.

Duljina formule jest broj pojavaka djelatelja u formuli.

Definicija 4 (Sustav $\mathbf{EVL}^-$)**.** Osnovne aksiomatske sheme $\mathbf{EVL}^-$ slijede, pri čemu $\alpha \in \{A, E\}$:

Ax1 primjena (aplikacija): $s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to (s \cdot t){:}G)$

Ax2 zbroj (suma): $s{:}F \to (s + t){:}F$, $t{:}F \to (t + s){:}F$

Ax3 provjerivač opravdanja: $t{:}F \to !t{:}t{:}F$

Ax4 konjunkcija opravdanja: $t{:}_\alpha F \wedge t{:}_\alpha G \to t{:}_\alpha (F \wedge G)$

Ax5 prihvaćena ili znanjotvorna primjena: $s{:}_\alpha (F \to G) \to (t{:}_\alpha F \to (s \cdot t){:}_\alpha G)$

Ax6 prihvaćen ili znanjotvoran zbroj: $s{:}_\alpha F \to (s + t){:}_\alpha F$, $t{:}_\alpha F \to (t + s){:}_\alpha F$

Ax7 prihvaćen ili znanjotvoran provjerivač: $t{:}_\alpha F \to !t{:}_\alpha t{:}_\alpha F$

Ax8 prihvaćena opravdanja jesu opravdanja: $t{:}_\alpha F \to t{:}F$

Ax9 racionalnost činitelja za prihvaćena i znanjotvorna opravdanja: $t{:}_\alpha F \to \neg \exists y\, y{:}_\alpha \neg F$

Ax10 faktivnost znanja: $t{:}_E F \to F$

Ax11 prihvaćena opravdanja činitelj smatra znanjotvornim: $t{:}_A F \to \exists y\, y{:}_A t{:}_E F$

Ax12 načelna znanjotvornost prihvaćenih opravdanja: $t{:}_A F \to \exists x\, x{:}_E t{:}_A F$

Ax13 egofornost: $c{:}F \to c{:}_\alpha F$.

Sustav $\mathbf{EVL}^-$ sustav je prirodne dedukcije s dodatnim aksiomima i definicijama. Deduktivni sustav $\mathbf{EVL}^-$ slijedi:

[op.] opetovanje: $\Gamma, F \vdash F$

[mon.] monotonost: $\Gamma \vdash F$, onda $\Gamma, \Delta \vdash F$

(nec.) necesitacija: ako $\vdash \phi$, onda $\vdash c{:}\phi$ [98]

[98] Kao teorem slijedi: ako je $\vdash \phi$, onda $c{:}_\alpha \phi$ iz pravila necesitacije i Ax13 isključenjem pogodbe. Pritom α stoji ili za prihvaćeno ili znanjotvorno opravdanje, odnosno $\alpha \in \{A, E\}$. Ako je ϕ teorem, teoremi su i $c_A{:}\phi$ i $c_E{:}\phi$ i $c{:}\phi$.

(u $\neg$) uvođenje nijeka: ako $\Gamma, F \vdash \neg F$, onda $\Gamma \vdash \neg F$

(i $\neg$) isključenje nijeka: ako $\Gamma, \neg F \vdash F$, onda $\Gamma \vdash F$

(u $\rightarrow$) uvođenje pogodbe: ako $\Gamma, F \vdash G$, onda $\Gamma \vdash F \rightarrow G$

(i $\rightarrow$) isključenje pogodbe: ako $\Gamma \vdash F \rightarrow G$ i $\Gamma \vdash F$, onda $\Gamma \vdash G$

(u $\vee$) uvođenje disjunkcije: ako $\Gamma \vdash F$ ili $\Gamma \vdash G$, onda $\Gamma \vdash F \vee G$

(i $\vee$) isključenje disjunkcije: ako $\Gamma \vdash F \vee G$ i $\Gamma, F \vdash H$ i $\Gamma, G \vdash H$, onda $\Gamma \vdash H$

(u $\wedge$) uvođenje konjunkcije: ako $\Gamma \vdash F$ i $\Gamma \vdash G$, onda $\Gamma \vdash F \wedge G$

(i $\wedge$) isključenje konjunkcije: ako $\Gamma \vdash F \wedge G$, onda $\Gamma \vdash F$ i $\Gamma \vdash G$

(i $\exists$) isključenje egzistencijalnoga kvantifikatora: ako $\Gamma \vdash \exists x F$ i $\Gamma, F(t/x) \vdash G$, onda $\Gamma \vdash G$, a t se ne javlja niti u pretpostavkama Γ, niti u $\exists x F$, niti u G

(u $\forall$) uvođenje univerzalnoga kvantifikatora: ako $\Gamma \vdash F(t/x)$, onda $\Gamma \vdash \forall x F$, a t se ne javlja niti u pretpostavkama Γ, niti u F

(u $\exists$) uključenje egzistencijalnoga kvantifikatora: ako $\Gamma \vdash F(t/x)$, onda $\Gamma \vdash \exists x F$

(i $\forall$) isključenje univerzalnoga kvantifikatora: ako $\Gamma \vdash \forall x F$, onda $\Gamma \vdash F(t/x)$

(Ax_n) aksiom: u svakom retku dokaza možemo pisati oprimjerenje aksiomatskih shema iz definicije 4 (na str. 71).

U dokazu ćemo se pozivati i na prethodno dokazane teoreme sustava te na definicije operatora znanja (def. 14 na str. 86) i vjerovanja (def. 13 na str. 86).

Sheme Ax1 – Ax3 vrijede za sva opravdanja. Međutim, uvodimo aksiome posebno za prihvaćena i posebno za znanjotvorna opravdanja. Motivacija za dva sustava sličnih aksioma jest u tome što bismo, primjerice, mogli i bez zasebne prihvaćene verzije Ax5 – Ax7 (uz promjenu α: naime, mogli bismo imati racionalne činitelje koji prihvaćaju protuslovne tvrdnje). Neko opravdanje upućuje na neko stanje stvari, no to ne mora značiti da proizvodi znanje: i dalje je opravdanje, premda ne proizvodi znanje. Za Ax4 – Ax9 uvodimo nove aksiome koji vrijede ili za opravdanja za kakvu formulu koja su prihvaćena ili za opravdanja za kakvu formulu koja proizvode znanje. Samo za znanjotvorna opravdanja vrijedi faktivnost, što je oprimjereno pomoću Ax10. Također dodajemo i Ax11 i Ax12, koji će biti potrebni za vezu s epistemičnim i doksastičnim aksiomima kao teoremima ovoga sustava. Promotrimo sad motivaciju za svaku aksiomatsku shemu.

Ax1 – Ax3 standardni su aksiomi logike opravdanja, koji su u Ax5 – Ax7 modificirani da odgovaraju skupovima prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja. U slučaju kada bismo imali samo opće aksiome, primjerice Ax1, ne bismo mogli izvesti primjenu iz $t{:}_A F \wedge s{:}_A(F \rightarrow G)$, odnosno slijedilo bi $(s \cdot t){:}G$ preko Ax8, ali ne i $(s \cdot t){:}_A G$.

Artemov [20, str. 4] uvodi hiperintenzionalnost: čak i ako su formule F i G istovrijedne, $t{:}F$ i $t{:}G$ ne moraju biti istovrijedne kad je npr. formula F pridružena opravdanju t, ali formula G nije, zbog čega slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F$, ali ne i $\nvDash_{*,\mathcal{V}} t{:}G$. Na tragu toga uvodi se ujedno svojstvo da su opravdanja točkasta (*pointed, single-conclusion*): postoji najviše jedna formula F takva da $t{:}F$ [20, str. 9]. Artemov to intuitivno brani na temelju toga da ako je t opravdanje koje proizvodi znanje za F, ali ne i za G, intuitivno je sumnjati u takvo opravdanje. Međutim, u prirodnim, a posebice evidencijalnim jezicima, isto opravdanje doista može opravdavati različite tvrdnje, stoga odbacujemo točkastost opravdanja i uvodimo Ax4.

Ax8 uvodimo kako bismo sa skupom prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja povezali opravdanja općenito, premda obrat ne vrijedi.

Motivacija za Ax9 jest sljedeća: kakvo opravdanje samo po sebi, kako ne mora biti znanjotvorno, moglo bi opravdavati i F i $\neg F$, no to ne znači da ono time ujedno opravdava protuslovlje $F \wedge \neg F$, stoga ne želimo opću verziju tipa $t{:}F \rightarrow \neg\exists y{:}\neg F$ i, shodno tomu, $t{:}F \wedge t{:}G \rightarrow t{:}(F \wedge G)$. Ako racionalni spoznavatelj vjeruje da F na temelju t, onda nikad neće biti slučaj da misli da mu to isto t daje znanje da $\neg F$. Stoga, kako se radi o idealnom racionalnom činitelju, vjeruje li i u F, i u G na temelju t, onda F i G neće biti uzajamno protuslovni te nema problema vjeruje li tada u $F \wedge G$ na temelju t.

Ax10 modificirali smo iz izvorne logike opravdanja gdje je bilo općenito pravilo za sva opravdanja, jer samo znanjotvorna opravdanja za neku formulu mogu doista voditi do istine, dok prihvaćena opravdanja za neku formulu ne moraju to činiti. Odnosno, samo su znanjotvorna opravdanja faktivna. Činitelj općenito može prihvatiti ili ne različite vrste opravdanja za neke formule. U slučaju da prihvaća neko opravdanje za neku formulu koje je ujedno i znanjotvorno opravdanje, pokazat ćemo kako takva situacija vodi do znanja (usp. definicija 14 na str. 86). Samo faktivnost vodi do istine, jer činjenica da govornik prihvaća neko opravdanje za neku tvrdnju ne znači da je ta tvrdnja istinita. Međutim, ako je opravdanje za neku tvrdnju u skupu znanjotvornih opravdanja, ta tvrdnja bit će istinita u modelu.

Ax11 govori da ako činitelj prihvaća neko opravdanje t za formulu F, onda on ima opravdanje da je to znanje. Naime, racionalni činitelj ne bi prihvaćao opravdanja koja ne vode do znanja, ali to se može dogoditi; stoga postoji neko opravdanje koje činitelj ima da je izvorno opravdanje znanjotvorno za neku formulu, premda to ne mora biti slučaj.

Odnosno, ako govornik nešto prihvaća, on smatra da je to istinito, odnosno smatra da se radi o znanjotvornom opravdanju.

Za razliku od našega sustava u kojemu ne pretpostavljamo da je vjerovatelj ispravan, postoje verzije doksastičnih logika gdje se pretpostavlja ispravni vjerovatelj, odnosno gdje vrijedi aksiom $BF \rightarrow F$ [142, str. 342], čime se pretpostavlja činitelj koji nikad ne vjeruje u neistinite tvrdnje. Međutim, takva je teza prejaka kao aksiom jer su česte situacije u kojima činitelj ipak vjeruje u neistinite tvrdnje. Ipak, činitelj doista vjeruje da takva propozicija jest istinita, odnosno da proizvodi znanje i shodno tomu vodi do istine, inače bi bilo iracionalno vjerovati u nju.

Doksastički analogon modalnoga aksioma **T** često se isključuje kao prejaka teza. Primjerie, Caie [36, str. 503] ne pretpostavlja da su idealizirana doksastička stanja bez pogrešaka, odnosno $B_\alpha\phi \rightarrow \phi$ (za kakvoga činitelja α) ne vrijedi, tj. idealizirano stanje vjerovanja ne mora biti ono koje isključuje neistinita vjerovanja. Shodno tomu, idealizirani model nema kripkeovsku relaciju refleksivnosti. Na tragu toga želimo staviti naglasak na samoga činitelja, koji vjeruje da ono u što vjeruje jest istina, premda to doista ne mora biti slučaj.

Pomoću Ax12 tvrdimo da ako spoznavatelj vjeruje da F, onda se to načelno može znati, odnosno ima kakvo znanjotvorno opravdanje. S obzirom na to da su evidencijalni jezici fokusirani na govornikova vjerovanja te iz njih izvedena opravdanja, a u striktno evidencijalnim jezicima rečenice bez opravdanja negramatične su, možemo reći da za govornika koji prihvaća kakvu tvrdnju, načelno postoji i znanje o toj tvrdnji, odnosno znanjotvorno opravdanje. Takva je interpretacija u skladu s evidencijalnim pogledom na svijet. Naime, čak i ako govornik ne može odmah tvrditi da se radi o znanju, može imati čvrsto utemeljeno vjerovanje na temelju dokaza kojega se trenutačno ne može sjetiti ili mu nije dostupan, ali načelno postoji (usp. [151, str. 412].

Ax13 je poopćenje načina na koji konstante opravdavaju aksiome u radovima Artemova [20, 16, 13] i Fittinga ([59, 61, 65]). Naime, u našemu je sustavu konstanta c opravdanje ne samo aksioma nego i svega što iz njih slijedi, kako bi se bolje uhvatila logička intuicija tibetske logike (v. str. 84).

Definicija 5 (Suvisao i nesuvisao skup)**.** Skup iskaza Γ nesuvisao je akko je iz njega dokažljivo i F i $\neg F$. Skup iskaza suvisao je akko nije nesuvisao.

Stavak 1. $\Gamma \vdash F$ akko je $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nesuvislo.

Dokaz. Dokaz preuzimamo iz [99, str. 108]. Neka je $\Gamma \vdash F$. Pretpostavimo općom shemom dokaza Γ i $\neg F$. Na temelju $\Gamma \vdash F$ dobivamo F, ali opetovanjem pretpostavke $\neg F$, čime dolazimo do kontradikcije te je $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nesuvislo.

Neka je $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nesuvisao. Pretpostavimo Γ i potom pretpostavimo $\neg F$. Izvodimo protuslovlje G i $\neg G$ jer je $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nesuvislo te isključenjem negacije dobivamo F, odnosno $\Gamma \vdash F$. □

Stavak 2 (Suvislost prihvaćenih opravdanja u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Sva prihvaćena i sva znanjotvorna opravdanja suvisla su, odnosno nemamo opravdanja za kontradikcije zbog pretpostavke racionalnoga činitelja.

Dokaz. Dokaz je trivijalan pozivanjem na aksiom Ax9. □

Moguće je da postoje opravdanja koja opravdavaju kontradiktorne tvrdnje, ali takva opravdanja ne proizvode znanje i govornik ih ne prihvaća.

Definicija 6 (Specifikacija konstanti u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Specifikacija konstanti **CS** određuje koje konstante opravdavaju koje aksiome. Svaki aksiom ima opravdanje koje je član **CS**. U logici $\mathbf{EVL}^-$ specifikacija konstanti svodi se na pravilo necesitacije, pri čemu c opravdava sve teoreme.

Intuicija nam je obuhvatititi činjenicu da svaki aksiom ima opravdanje, a potom i opravdanje za to opravdanje i tako dalje, što je osigurano provjerivačem opravdanja.

Specifikacije konstanti mogu biti prazne, potom totalne (svaka je konstanta opravdanje za svaki aksiom), aksiomatski prikladne (svaki aksiom ima opravdanje bilo koje dubine) i injektivne (svaka konstanta opravdava najviše jedan aksiom) [19, str. 9] te shematske (svaka konstanta opravdava neki broj aksiomatskih shema, ali možda i niti jednu i ništa više) [2, str. 33]. U ovom sustavu specifikaciju konstanti smatramo aksiomatski prikladnom i shematskom.[99]

---

[99] Σ_2^p drugi je dio polinomne hijerarhije, problem je u ako postoji učinkovit provjerivač tako da za bilo koju potvrdnu instanciju $x \in \{0,1\}^n$ problema postoji dokaz polinomne duljine y, pri čemu za sve dokaze z polinomne duljine provjerivač dokaza prihvaća x, y, z. U [2] pokazuje se zanimljivo svojstvo da ako bazna logika opravdanja **J** ima aksiomatski prikladnu i shematsku specifikaciju konstanti, onda je SAT-problem **J**-Σ_2^p-težak. Odnosno, uz **NP** *oracle*, problem u pozadini i dalje je **NP** (**NP** je klasa računske složenosti, klasa svih problema odlučljivosti, gdje za instancije problema s odgovorom "da" postoje dokazi provjerljivi u polinomnom vremenu). Egzistencijalni kvantifikator ostavio bi nas u **NP**-klasi.

Stavak 3 (Dokažljivost iz nadskupa)**.** Ako je iz Γ dokažljiv iskaz F, a Γ je podskup skupa Δ, onda je i iz Δ dokažljivo F, odnosno:

ako $\Gamma \vdash F$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, onda $\Delta \vdash F$.

Dokaz. Dokaz (prema [99, str. 102]): neka $\Gamma \vdash F$ i $\Gamma \subseteq \Delta$. Svi članovi skupa Γ ujedno su članovi skupa Δ, stoga je jednak dokaz iskaza F moguć i iz skupa Δ, dok skup Δ može sadržavati i druge pretpostavke koje ne moramo rabiti u dokazu iskaza F. $\square$

Stavak 4 (Nesuvislost nadskupa nesuvisloga skupa)**.** Ako je skup Γ nesuvisao, nesuvisao je i svaki njegov nadskup.

Dokaz. Dokaz slijedi iz stavka 3 jer sve što je dokažljivo iz skupa Γ, dokažljivo je i iz bilo kojega njegova nadskupa Δ. $\square$

5.3.3 Semantika logike EVL$^-$

Definicija 7 (Primjerena zatvorenost u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Skup opravdanja primjereno je zatvoren[100] ako i samo ako:

- sadržava sva aksiomatska opravdanja, odnosno opravdanja označena konstantama
- zatvoren je pod primjenom.

Svi aksiomi istiniti su (proizvode znanje) i prihvaćeni su te su zatvoreni pod primjenom. Racionalni činitelj zna aksiome te ih prihvaća i oni su istiniti te činitelj prihvaća i sve što slijedi aplikacijom (v. definiciju 4 i stavak 2).

Definicija 8 (Model logike $\mathbf{EVL}^-$)**.** Model logike $\mathbf{EVL}^-$ jest uređena osmorka $* = \langle \mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{O}, \phi \rangle$, pri čemu:

1. $\mathcal{D}$ jest neprazan skup opravdanja. Članove skupa $\mathcal{D}$ nazivat ćemo 'opravdanja'.

[100] Termin se preuzima od Artemova [19], [20], no u Artemova su primjereno zatvoreni skupovi oznaka, a ne opravdanja.

2. - 3. $\mathcal{A}$ je primjereno zatvoren skup prihvaćenih opravdanja, $\mathcal{E}$ je primjereno zatvoren skup znanjotvornih opravdanja te za oba skupa vrijedi:

   - $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$
   - $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$
   - $\mathcal{A} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$

4. $\mathcal{T}_0$ jest tumačenje iskaznih slova koje svakomu iskaznomu slovu $S \in Prop$ pridružuje istinitosnu vrijednost:

   - $\mathcal{T}_0$:$Prop \longrightarrow \{1, 0\}$

5. $\mathcal{T}$ jest tumačenje konstanti takvo da svakoj konstanti pridružuje neko opravdanje, pod uvjetom da je svako opravdanje označeno konstantom element presjeka skupova prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja:

   - $\mathcal{T}$:$Con \longrightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$

6. $\mathcal{V}$ je vrednovanje koje svakoj varijabli pridružuje neki element domene:

   - $\mathcal{V}$:$Var \longrightarrow \mathcal{D}$

7. $\mathcal{O}$ jest denotativna funkcija iz skupa opravdavajućih oznaka u domenu:[101]

   - $\mathcal{O}$:$Tm \longrightarrow \mathcal{D}$
   - ako je t varijabla, onda $\mathcal{O}(t) = \mathcal{V}(t)$
   - ako je t konstanta, onda $\mathcal{O}(t) = \mathcal{T}(t)$
   - ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{A}$
   - ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ ili $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(t{+}s) \in \mathcal{A}$
   - ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(!t) \in \mathcal{A}$
   - ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{E}$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$, onda $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{E}$
   - ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{E}$ ili $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$, onda $\mathcal{O}(t{+}s) \in \mathcal{E}$.
   - ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{E}$, onda $\mathcal{O}(!t) \in \mathcal{E}$

[101] Riječ je o pridruživanju opravdanjima, a ne oznakama. Drugom notacijom govorimo o svakom $[\![t]\!]$. Artemov [19], [20] ima notaciju tipa t^* za model $*$, no u njega su u modelu opravdavajuće oznake, a ne opravdanja. Za razliku, u uzročnoj interpretaciji kod Kovača [100, str. 190], odgovarajuća funkcija In u modalnom kontekstu korelira same predmete i formule.

8. ϕ jest evidencijska funkcija koja podskupove formula pridružuje opravdanjima, za koju vrijede sljedeći uvjeti:

   (a) $\phi{:}\mathcal{D} \longrightarrow 2^{Fm}$

   (b) uvjeti zatvorenosti:

Za sva opravdanja vrijedi:[102].

- uvjeti zatvorenosti za aplikaciju: ako je $(F \to G) \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i ako vrijedi $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$, onda $G \in \phi(\mathcal{O}(s \cdot t))$
- uvjet zatvorenosti za monotonost ili zbroj: ako je $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ ili $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$, onda $F \in \phi(\mathcal{O}(t+s))$
- uvjet zatvorenosti za provjerivač opravdanja: ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda $t{:}F \in \phi(\mathcal{O}(!t))$

Za prihvaćena opravdanja, odnosno za svaki $\mathcal{O}(t)$ u $\mathcal{A}$ vrijedi:

– ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda za svaki $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$ vrijedi da $\neg F \notin \phi(\mathcal{O}(s))$
– ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda postoji s takav da $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$ i $t{:}_E F \in \phi(\mathcal{O}(s))$
– ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $G \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda $(F \wedge G) \in \phi(\mathcal{O}(t))$
– ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda $t{:}_A F \in \phi(\mathcal{O}(s))$ za neki $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$.

Za znanjotvorna opravdanja, odnosno za svaki $\mathcal{O}(t)$ u $\mathcal{E}$ vrijedi:

– ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda za svaki $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$ vrijedi da $\neg F \notin \phi(\mathcal{O}(s))$
– ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $G \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda $(F \wedge G) \in \phi(\mathcal{O}(t))$.

Prvo, svakomu članu domene pridružuje se podskup formula te drugo, vrijede uvjeti zatvorenosti. Motivacija je ovakvoga međukoraka zbog pokoličavanja nad opravdanjima.

Domena je skup arbitrarnih predmeta koje neformalno razumijemo kao opravdanja, takav da na njoj vrijede navedeni uvjeti zatvorenosti.[103] U prirodnim evidencijalnim jezicima svaki predmet može biti evidencija, primjerice otisak stopala kao konkretni dokaz

[102] Standardne uvjete zatvorenosti za opravdavajuće oznake, a ne za opravdanja, prvo u logici dokaza, a poslije primijenjene na logiku opravdanja, uveo je Mkrtychev [115].

[103] U našoj su logici u domeni proizvoljni predmeti, koje neformalno interpretiramo kao opravdanja, dok ćemo u kanonskom modelu rabiti skup opravdavajućih oznaka.

ili čak običan list papira može npr. biti evidencija da netko nije pisao danas, a obično piše (zaključivanje iz senzornoga iskustva).

U domeni su ti proizvoljni predmeti. Zato, kako oznake i same jesu predmeti, kanonski model i sam jest model (kanonski model, naime, mora zadovoljavati definiciju modela). Predmete u domeni samo neformalno interpretiramo kao opravdanja.

Formula koja ima pridruženo opravdanje[104] član je skupa formula koje su povezane s opravdanjem t, a povezane su preko denotativne funkcije $\mathcal{O}$. Funkcija ϕ šalje predmet na skup formula, dok $\mathcal{O}$ opravdavajuće oznake šalje u predmete, odnosno $\mathcal{O}(t)$ član je domene. Nekoliko je motivacija za takvu posrednost. Čini se kako bismo mogli izravno imati vezu s kakvom evidencijskom funkcijom, gdje je formula argument, a predmeti izravno ulaze kao vrijednosti. Prva je motivacija pokoličavanje nad opravdanjima. Druga je motivacija mogućnost neprebrojivo mnogo opravdanja. Naime, u evidencijalnim jezicima mogu postojati i neimenovana opravdanja, tvrdimo kako svaki predmet može postati opravdanjem za kakvu tvrdnju, potencijalno, te ne mora biti imenovano. Treća je motivacija ta da se različiti gramatički oblici mogu odnositi na jedan te isti predmet, primjerice na kišu (npr. tvrdnje kao "kiši", "kišovito je", "pada kiša") koji je evidencija za kakve tvrdnje. U logici $\mathbf{EVL}^{-}$ različite oznake mogu označavati jedno te isto opravdanje, primjerice oznake $t + s$ i $s + t$, a ta razlika između jezičnih oznaka i izvanjezičnih predmeta nestala bi ako bismo skupove formula pridruživali izravno oznakama.

Uvjeti zatvorenosti aplikacije govore o racionalnom činitelju – želimo da slijede i logičke posljedice formula, odnosno u specifičnim slučajevima i prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja želimo racionalnoga govornika koji prihvaća posljedice svojih vjerovanja, odnosno opravdanja. Svako se opravdanje može provjeriti nekim drugim opravdanjem, zato u evidencijalnim jezicima postoje različite klase opravdanja, od kojih su neka pouzdanija od drugih (primjerice direktna nad indirektnima).

Uvjete zatvorenosti donosimo posebno i za skupove prihvaćenih opravdanja i za skupove znanjotvornih opravdanja, naime ako činitelj ima opravdanje koje prihvaća za tvrdnju F i također za tvrdnju $F \to G$, prihvaćanje posljetka G ne bi morao biti slučaj da to nismo osigurali uvođenjem relevantnih aksioma i njima odgovarajućim uvjetima zatvorenosti.

---

[104] Po definiciji 8, svakom opravdanju mogao bi biti pridružen i jedan te isti skup formula ili prazan skup, no takva mogućnost nije relevantna za opis evidencijalnih jezika.

Stavak 5 (Postoji model za logiku $\mathbf{EVL}^-$)**.** Dokazujemo kako postoji model logike $\mathbf{EVL}^-$.

Dokaz. Pretpostavimo kako domena ima jedan predmet, odnosno jedno opravdanje o. Svaka varijabla, konstanta ili polinom označuje taj isti predmet. Svako vrednovanje varijabli pridružuje upravo taj predmet. Svako tumačenje konstanti označava upravo taj predmet, odnosno to opravdanje. Dokazujemo da su uvjeti za $\mathcal{O}$ i ϕ zadovoljeni.

Dokazujemo uvjete za $\mathcal{O}$. Ako je t varijabla, označuje jedini predmet u domeni, odnosno opravdanje o, $\mathcal{V}(t) = o$. Ako je t konstanta, tumačenje konstanti $\mathcal{T}(t)$ označava o. Ako je $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{A}$. Ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ ili $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(t + s) \in \mathcal{A}$ i ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(!t) \in \mathcal{A}$. Analogno se dokazuje i za skup $\mathcal{E}$.

Za ϕ odabiremo da pridružujemo svakomu predmetu iz $\mathcal{D}$ neki maksimalan suvisao skup Γ^{max} po definiciji 18 (str. 104). Po članstvu iz leme 1 (str. 104), $F \to G \in \Gamma^{max}$ akko $F \notin \Gamma^{max}$ ili $G \in \Gamma^{max}$. Ako $F \to G \in \Gamma^{max}$ i ako $F \in \Gamma^{max}$, onda po lemi 1 slijedi i $G \in \Gamma^{max}$. Ako $(F \to G) \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i ako $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$, onda $G \in \phi(\mathcal{O}(t \cdot s))$, posljedak automatski slijedi. Analogno i za disjunkciju, po lemi 1 (str. 104) $F \vee G \in \Gamma^{max}$ akko $F \in \Gamma^{max}$ ili $G \in \Gamma^{max}$. Odnosno ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ ili $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$, onda $F \in \phi(\mathcal{O}(t + s))$ te posljedak trivijalno slijedi. Ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda $t{:}F \in \phi(\mathcal{O}(!t))$, što automatski slijedi jer je t jedini član. Ako $F \in \Gamma^{max}$ i ako $G \in \Gamma^{max}$, onda i $F \wedge G \in \Gamma^{max}$, što se izvodi analogno za uvjet zatvorenosti za konjunkciju.

Uvjetima se dodaje pripadnost skupu $\mathcal{A}$ ili $\mathcal{E}$. Po lemi 1 (str. 104), $\neg F \in \Gamma^{max}$ akko $F \notin \Gamma^{max}$. Ako je $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ takav da $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$, onda $\neg F \notin \phi(\mathcal{O}(s))$ za bilo koji $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$. S obzirom na to da svaka oznaka označava jedan te isti predmet, $\neg F \notin \phi(\mathcal{O}(t))$. Analogno vrijede i ostali uvjeti zatvorenosti. □

Definicija 9 (Uvjeti istinitosti u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Uključene su standardne booleovske istinitosne funkcije ($\vDash_{*,\mathcal{V}} F$ ekvivalentno je $F^* = 1$[105], a također i specifični uvjeti vezani uz opravdanja. Pritom vrijedi da je $\mathcal{V}' = \mathcal{V}[d/x]$.

- $\vDash_{*,\mathcal{V}} S$ akko $\mathcal{T}_0(S) = 1, S \in Prop$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} \neg F$ akko $\nvDash_* F$

[105] Na ovaj se Artemovljev [19, 20] način označava istinitost onoga što F znači, usp. $[\![F]\!]^*$.

- $\vDash_{*,\mathcal{V}} F \wedge G$ akko $\vDash_{*,\mathcal{V}} F$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} G$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} F \vee G$ akko $\vDash_{*,\mathcal{V}} F$ ili $\vDash_{*,\mathcal{V}} G$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} F \rightarrow G$ akko $\nvDash_{*,\mathcal{V}} F$ ili $\vDash_{*,\mathcal{V}} G$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} F \leftrightarrow G$ akko ($\nvDash_{*,\mathcal{V}} F$ ili $\vDash_{*,\mathcal{V}} Q$) i ($\vDash_{*,\mathcal{V}} F$ ili $\nvDash_{*,\mathcal{V}} G$)
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} \forall x F$ akko za svako opravdanje $d \in \mathcal{D}$, $\vDash_{*,\mathcal{V}'} F$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} \exists x F$ akko za barem jedno opravdanje $d \in \mathcal{D}$, $\vDash_{*,\mathcal{V}'} F$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F$ akko $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_A F$ akko $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_E F$ akko $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{E}$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} F$
- $F \in \phi(\mathcal{O}(c))$ akko F je teorem.

Formula $t{:}F$ istinita je u modelu ako je formula F u skupu formula pridruženom toj opravdavajućoj oznaci.

Samo će za znanjotvorna opravdanja slijediti da ono što opravdavaju doista jest istinito, odnosno faktivnost ne vrijedi za sva opravdanja, nego samo za znanjotvorna opravdanja, ali ne i za samo prihvaćena opravdanja. Takav bi sustav bio preslab, dok sustav logike dokaza biva prejak za evidencijalne jezike jer, kako smo spomenuli, posjedovanje kakvoga opravdanja za neku tvrdnju ne znači da je ta tvrdnja istinita.

S obzirom na to da nam je istinitost opravdavajuće oznake u modelu definirana pripadnošću adekvatne formule u skupu formula pridruženom toj opravdavajućoj oznaci, pri čemu je to opravdanje dio skupa znanjotvornih opravdanja (za svaku istinitu formulu mora postojati neko opravdanje koje vodi do znanja), tako će $t{:}_A F$ biti istinito u modelu uz dodatni uvjet da je u skupu prihvaćenih opravdanja (govornik prihvaća opravdanje t za formulu F), a $t{:}_E F$ – kao znanjotvorno opravdanje – ako je ujedno to opravdanje u skupu znanjotvornih opravdanja.[106]

[106] Neko opravdanje t zapravo i ne mora opravdavati F doista, odnosno moguće je zamisliti situaciju gdje govornik prihvaća da neko opravdanje opravdava neku formulu, a da to doista nije slučaj. Metafizički uzimamo idealiziranu situaciju u evidencijalnim jezicima gdje su takve situacije doista rijetke, s obzirom na to da je vrlo bliska veza između opravdanja i istinitosti, odnosno razlozi moraju biti dovoljno dobri da bi neka rečenica dobila takav evidencijal. Samim time takve situacije nisu česte. Trenutačno evidencijska funkcija govori koja rečenica ima koje opravdanje, a jedna opcija modifikacije sustava bilo bi uvesti novi uvjet na evidencijsku funkciju ili novu evidencijsku funkciju koja govori za što govornik vjeruje da neko opravdanje opravdava neku formulu.

Prihvaćena i znanjotvorna opravdanja nisu posebne ontološke vrste opravdanja, odnosno nemamo kakvu formulu poput At, gdje bi A bio predikat, a t opravdanje te bi formula značila da je to opravdanje prihvaćeno. Radi se o odnosu uređenoga para $\langle t, F \rangle$: naime, govornik prihvaća da kakvo opravdanje opravdava formulu F. Kad bismo imali formulu tipa At, govorilo bi se o statusu ili vrsti toga opravdanja, a ne o odnosno između skupa opravdanja i same formule.

Shodno tomu, moguće je i da kakvo opravdanje bude znanjotvorno opravdanje za neku formulu F, ali da ne bude znanjotvorno opravdanje za neku formulu G: $t_E{:}F \wedge \neg t_E{:}G$ (pri čemu F i G nisu ista formula). Spomenuli smo kako Artemov [20, str. 4] uvodi svojstvo točkastosti, onosno da postoji najviše jedna formula F takva da $t{:}F$, no intuicija u prirodnom jeziku jest da su takve situacije moguće, što nas vodi i do mogućih scenarija gdje za različite formule opravdanja mogu biti prihvaćena ili ne, a također i proizvoditi znanje ili ne.

Stavak 6 (Primjerena zatvorenost presjeka)**.** Presjek skupa prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja primjereno je zatvoren. Podskup takvoga skupa jest i skup opravdanja označenih konstantama.

Dokaz. Neka je $S = \{\mathcal{O}(c){:}c \in Con\}$ i $S \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$. Stoga je $S \subseteq \mathcal{A}$ i $S \subseteq \mathcal{E}$. Uzmimo $\mathcal{O}(t) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$ i $\mathcal{O}(s) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$. Slijedi $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$. Stoga $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{A}$ po definiciji 8 (str. 76). Također slijedi $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{E}$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$ i zbog definicije 8 (str. 76) za $\mathcal{E}$ vrijedi $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{E}$. Slijedi da je ako je $\mathcal{A}$ primjereno zatvoren i $\mathcal{E}$ primjereno zatvoren, onda je i presjek $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$ primjereno zatvoren. □

Artemov [19, str. 9] dopušta da su u presjeku skupa prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja sve konstante. Konstante proizvode znanje i prihvaćene su. U filozofskoj interpretaciji smatramo gödelovsku matematičku intuiciju opravdanjem za aksiome. Kant intelektualni zor (*intellektuelle Anschauung*) smatra opravdanjem metafizičkoga znanja, no premda ne smatra da je intelektualni zor nemoguć, njime čovjek ne raspolaže, dok se pak gödelovska matematika i apstraktna intuicija temelje na nekoj vrsti pojmovnoga zora. Gödel svoj koncept "konkretne intuicije" uspoređuje s kantovskim zorom i konceptom intuicije prisutnim u Hilbertovu finitizmu.[107] Međutim, kantovski pojam zora preuzak mu je u kontekstu apstraktnih pojmova kao dokaza te apstraktnu ili formalnu intuiciju smatra izvorom novih aksioma u teoriji skupova:

[107] Finitizam prihvaća postojanje samo konačnih matematičkih objekata, odnosno neće se prihvatiti beskonačni skupovi i sl.

> "Bez obzira na njihovu udaljenost od osjetilnoga iskustva, imamo i neku vrstu percepcije objekata teorije skupova, što se vidi iz činjenice da nas aksiomi primoravaju na svoju istinitost. Ne vidim razlog zašto bismo imali manje vjere u ovu vrstu percepcije, tj. u matematičku intuiciju, negoli u osjetilnu percepciju, koja nas tjera da gradimo fizikalne teorije i očekuje da će se buduće osjetilne percepcije slagati s njima i, nadalje, da vjerujemo da pitanje koje nije odlučljivo danas ima značenje i da bi moglo biti odlučljivo u budućnosti. Paradoksi teorije skupova nisu ništa više problematičniji za matematiku nego što su to su varke osjetila za fiziku." [77, str. 268][108]

Stavak 7 (Evidencija o zaključivanju u logici $\mathbf{EVL}^-$)**.** Ako znamo sve premise, znamo i konkluziju, odnosno ako su nam opravdanja za premise u skupu znanjotvornih opravdanja, član toga skupa bit će i opravdanje za konkluziju.

- $\mathcal{O}(t), \mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$ akko $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{E}$
- $\mathcal{O}(t), \mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$ akko $\mathcal{O}(t \cdot s) \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{O}(t), \mathcal{O}(s) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$ akko $\mathcal{O}(t \cdot s) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$

Dokaz. Dokaz trivijalno slijedi. Prva dva uvjeta osigurana su uvjetima denotativne funkcije iz definicije 8 modela na str. 76. Za treću tvrdnju pozivamo se na stavak 6 na str. 82 i definiciju 8 modela na str. 76. □

Slijedi da činitelj prihvaća posljedice svojih vjerovanja, a te su posljedice prihvaćene i istinite.

Definicija 10 (Zadovoljivost skupa iskaza u modelu $*$)**.** Skup iskaza Γ zadovoljiv je akko postoji barem jedan model $*$ s funkcijom ϕ takvom da funkcija ϕ čini istinitima sve članove skupa Γ (usp. [99, str. 81]).

[108] *But despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future. The set-theoretical paradoxes are hardly any more troublesome for mathematics than deceptions of the senses are for physics.*

Definicija 11 (Semantička posljedica u modelu $*$)**.** Iskaz F semantička je posljedica skupa iskaza Γ akko: ako $\models_{*,\mathcal{V}} \Gamma$, onda $\models_{*,\mathcal{V}} F$. Odnosno, $\Gamma \models F$ ako je F istinito u svakom modelu $*$ u kojem je istinit svaki član Γ (usp. [99, str. 82]).

Definicija 12 (Valjanost u modelu $*$)**.** Za svaki iskaz F taj F valjan je ako je F ϕ-valjano, odnosno istinit u svakom modelu $*$ (usp. [99, str. 82]).

Stavak 8. $\Gamma \models F$ akko je $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nezadovoljiv.

Dokaz. Dokaz preuzimamo iz [99, str. 100]. Pretpostavimo da je skup $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nezadovoljiv i da je svaki član skupa Γ istinit. Prema tome je $\neg F$ neistinito, a F istinito, što po definiciji slijeda, odnosno po definiciji 9 (str. 80) uvjeta istinitosti, daje $\Gamma \models F$.

Slijedi dokaz druge strane. Pretpostavimo da $\Gamma \models F$ i da su svi članovi Γ istiniti. Stoga po po definiciji slijeda, odnosno po definiciji 9 (str. 80) uvjeta istinitosti, F mora biti istinit, a $\neg F$ neistinit. Tada je skup $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nezadovoljiv. □

5.3.4 Metateorem logičke intuicije

Stavak 9 (Metateorem kolapsa logičke intuicije)**.** $\vdash (c \cdot c){:}\phi$ akko $\vdash c{:}\phi$.

Dokaz. Dokažimo u smjeru slijeva nadesno. Neka vrijedi $(c \cdot c){:}\phi$. Dakle, ϕ je dobiveno aplikacijom $(c \cdot c)$ iz $c{:}\psi$ i $c{:}(\psi \rightarrow \phi)$. Dakle, $\vdash \psi$ i $\vdash \psi \rightarrow \phi$. Dakle $\vdash \phi$ isključenjem pogodbe. Pravilom necesitacije dobivamo $\vdash c{:}\phi$.

U smjeru zdesna nalijevo pretpostavimo neka vrijedi $c{:}\phi$. Neka je ψ teorem, onda je teorem i $\psi \rightarrow \phi$ (iskazna logika). Slijedi $\vdash \phi$. Pravilom necesitacije dobivamo $c{:}\psi$ i $c{:}(\psi \rightarrow \phi)$. Aplikacijom dobivamo $(c \cdot c){:}\phi$. □

c gledamo kao jedinstveno intelektualno iskustvo koje opisuje egoforni evidencijal u tibetskom. Egoforni evidencijal opisivan je na sljedeće načine:

- najkompleksnija je vrsta evidencijalnosti, ego-evidencijalnost [69, str. 102], trenutno i izravno znanje, koje nije posredovano niti percepcijom niti zaključivanjem [69, str. 105]

- govornikova reprezentacija pristupu vlastitom stanju znanja s obzirom na informaciju u iskazu [72, str. 63]

- specifičan je za sudionika govornoga čina [3, str. 147]

- upletenost je govornika u kakav događaj, bilo kao osobna činjenica, svjesna osobna činjenica ili iskustvo [37, str. 25]

- lingvistički je rijetkim fenomenom na granici između evidencijalnosti i vlastite kategorije [161, str. 263].

U ovom radu nastavljamo se na prethodna spomenuta istraživanja, dijelom na Garretta [69], dijelom na Gawne [72]. Garrett smatra da je egoforna evidencijalnost prirodna u nedostatku direktnih ili indirektnih evidencijala. Odnosno, smatra da se radi o samospoznaji ili stavovima *de se* [69, str. 116] te smatra kako se mora uspostaviti epistemološka teorija bazirana na propozicijama, koja će prepoznati evidencijalnu bazu znanja *de se*. Gawne pak smatra da se radi o direktnom baratanju trenutačnim znanjem, bez oslanjanja na percepciju, ali istodobno govornik mora biti u kontroli, odnosno ne radi se o nesvjesnoj radnji [72, str. 61]. Pritom je zaključivanje moguće u slučaju osobne veze s takvim iskustvom.

U našoj logici c predstavlja apriorna opravdanja, opravdanja neovisna o osjetilnom iskustvu (svojevrsnim intelektualnim zorom), te tako c opravdava i aksiome, i tvrdnje da su aksiomi opravdani intelektualnim zorom, i tvrdnje da intelektualni zor opravdava tvrdnju da su aksiomi opravdani intelektualnim zorom itd. Sam aksiom kaže da je intelektualni zor nepogrešiv, da je spoznavatelj logički sveznajuć, u smislu da prihvaća sva logička ili apriorna opravdanja. Konstanta c opravdanje je svih teorema, stoga je znanje koje opravdava posredovano zaključivanjem.

Kod Artemova ([20], [16], [13] i Fittinga ([59], [61], [65]) konstantna specifikacija govori nam koje konstante opravdavaju koje aksiome. Odnosno, u tim istraživanjima posebna su opravdanja za posebne aksiome te posebna opravdanja za ta opravdanja i tako dalje. U skladu s evidencijalnom tradicijom s posebnim osvrtom na tibetski jezik ako govornik ima logičko opravdanje za kakav p te logičko opravdanje za kakav q, i dalje se radi o logičkoj intuiciji te to omogućava redukciju različitih konstanti (c_1, c_2, c_3... koje bi opravdavale različite aksiome) na jednu konstantu. Naime, u skladu s lingvističkim istraživanjima, filozofska je intuicija da uzastopnom primjenom zora nije uključeno ništa osim intelektualnoga zora. Odnosno, aposteriorno iskustvo nelogičko je, a logičko apriorno te se konstanta c odnosi na apriorna opravdanja.[109]

5.3.5 Epistemični i doksastični teoremi

Definirat ćemo i dva nova operatora – K i B – koja će nam pomoći da uz skup prihvaćenih i znanjotvornih opravanja pokažemo kako takva klasifikacija utječe na znanje i vjerovanje samoga činitelja. Činitelj ima opravdanje za neku formulu, no pokazujemo kad to opravdanje vodi do znanja, a kad samo do vjerovanja. Intuicija je da činitelj zna kakvu tvrdnju ako ima opravdanje za nju i ako prihvaća to opravdanje i ako je to opravdanje dio skupa znanjotvornih opravdanja. S druge pak strane, ako je to opravdanje samo dio skupa prihvaćenih opravdanja, činitelj vjeruje u neku tvrdnju, što ne znači ima znanje, odnosno istinito opravdano vjerovanje.

Definicija 13 (Operator B)**.** Definira se operator B, koji označava da činitelj **vjeruje** da F. Definiramo ga postojanjem opravdanja koje je prihvaćeno. Uvodimo egzistencijalni kvantifikator zbog obrata: $BF \to y{:}_A F$ značilo bi da ako vjerujem da F, prihvaćam bilo koje opravdanje za F, a želimo navesti kako postoji barem jedno opravdanje koje prihvaćam i zbog njega vjerujem da F:

- $BF \leftrightarrow_{def} \exists x\, x{:}_A F$.

Definicija 14 (Operator K)**.** Definira se operator K, koji označava da činitelj **zna** da F. Definiramo ga postojanjem opravdanja koje je i prihvaćeno i znanjotvorno. Uvodimo egzistencijalni kvantifikator zbog obrata:

- $KF \leftrightarrow_{def} \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$.

Definicija 15 (Uvjet istinitosti vjerovanja)**.** BF označava da činitelj vjeruje da F ako postoji opravdanje za F koje je u skupu prihvaćenih opravdanja.

---

[109] U slučaju proširenja evidencijalnih logika više agenasa dijelili bi logičku konstantu kao opravdanje za aksiome, a za kontingentne stvari mogli bismo rabiti varijable, kako bi se razlikovalo npr. moje od tuđega vizualnoga iskustva, dok istodobno ipak imamo zajedničku logiku kao govornici kakvoga evidencijalnoga jezika.

- $\vDash_{*,\mathcal{V}} BF$ akko postoji t takav da $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F$ i $t \in \mathcal{A}$.

Definicija 16 (Uvjet istinitosti znanja)**.** KF označava da činitelj zna da F ako postoji opravdanje za F koje je i u skupu prihvaćenih i u skupu znanjotvornih opravdanja.

- $\vDash_{*,\mathcal{V}} KF$ akko postoji t takav da $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F$ i $t \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$.

Ako činitelj vjeruje da F, to podrazumijeva da ima opravdanje za iskaz F te to opravdanje činitelj prihvaća, odnosno dio je skupa prihvaćenih opravdanja. Ako pak činitelj zna da F, onda činitelj ima opravdanje za taj iskaz i to je opravdanje dio i skupa prihvaćenih i skupa znanjotvornih opravdanja.

Definicija 17 (Epistemični i doksastični teoremi)**.** Aksiomatskim shemama dodaju se klasični aksiomi (T1–T7) epistemične logike **S5** i dokastične logike **KD4** [83, str. 473], [132, str. 216–219], uz dodatak T8, koji su u logici $\mathbf{EVL}^{-}$ teoremi.

T1 $K(F \to G) \to (KF \to KG)$

T2 $KF \to F$

T3 $KF \to KKF$

T4 $KF \to \neg K \neg F$

T5 $B(F \to G) \to (BF \to BG)$

T6 $BF \to \neg B \neg F$

T7 $BF \to BBF$

T8 $KF \to BF$.

Bilo koja aksiomatizacija iskazne logike, T1, T2 i T3 zajedno s pravilom *modus ponens* te necesitacijom čine sustav **S4**, a T5, T6 i T7 s pravilom *modus ponens* i necesitacijom čine **KD4** (usp. [114, str. 5]).

U slučaju T1 radi se o racionalnom činitelju koji zna sve logičke posljedice svojih znanja, dok je u T5 doksastični analogon. T2 odnosi se na faktivnost znanja (što činitelj zna, to je istinito). T3 pozitivna je introspekcija (ako činitelj zna da F, onda činitelj zna da zna F), a u T7 doksastični analogon. T4 analogon je standardnomu modalnomu aksiomu **D** ($\Box F \to \Diamond F$).

U T6 ako činitelj vjeruje da F, onda on ne vjeruje da nije F, odnosno činitelj ne vjeruje u kontradikcije, što je ekvivalent standardnomu modalnomu aksiomu **D**. Ovdje je logično očekivati pogrešivost vjerovanja, stoga neće vrijediti doksastični ekvivalent modalnoga aksioma **T**, odnosno ne vrijedi $BF \rightarrow F$ jer vjerovanje u što ne implicira istinitost toga. No, vrijedi, analogno epistemičkim aksiomima, pozitivna introspekcija u T7.

T8 dodajemo kao izolirani primjer da bi se i neke posredne logike koje spajaju epistemičnu i doksastičnu logiku mogle izravno ili s izmjenama uključiti u ovaj sustav. T8 intuitivno govori kako znanje implicira vjerovanje, dok obrat neće vrijediti.

Postoje slični modalni sustavi, primjerice sustavi $\mathbf{S4_K} + \mathbf{KD45_B}$ zajedno s aksiomima (K →B) $KF \rightarrow BF$ te (KB) $B\phi \rightarrow KB\phi$ čine sustave $\mathbf{KL(S4/K45}$ i $\mathbf{KL(S5/KD45)}$ [114, str. 6]. Taj su sustav prvi predložili Kraus i Lehmann ([102], prema [114, str. 6]) te su istaknuli kako dodavanje "intuitivnoga" aksioma (BK) $BF \rightarrow BKF$, odnosno da činitelj vjeruje da zna što vjeruje vodi do kolapsa znanja i vjerovanja jer je tada izvediva formula $KF \leftrightarrow BF$. Van der Hoek ([156], prema [114, str. 6]) istražuje alternativni sustav gdje se dopušta dodavanje formule (BK) kao aksioma, a sustav nastaje iz $\mathbf{KL(S5/KD45)}$ tako da se zamijeni negativni introspekcijski modalni aksiom **5** za znanje pozitivnim introspekcijskim modalnim aksiomom **4**, uz sljedeća svojstva:

- $BBF \rightarrow BF$
- $B\neg BF \rightarrow \neg BF$
- $BF \rightarrow BKF$
- $\neg BF \rightarrow K\neg BF$
- $\neg KF \rightarrow B\neg KF.$

Kad bi vrijedio obrat pozitivne introspekcije $BBF \rightarrow BF$, činitelj bi bio imun na mooreovske paradokse [132, str. 217].

Artemov [14] spaja epistemične aksiome **K** i **T** uz necesitaciju s aksiomima i pravilima logike dokaza **LP** te dodaje aksiom (C1) koji naziva nepobitnošću evidencije (*undeniability of evidence*), odnosno ako postoji dokaz za kakvu tvrdnju, onda činitelj zna tu tvrdnju: $t{:}F \rightarrow K_iF$. Aksiomi i pravila jesu sljedeći [14, str. 8]:

(I) *klasična iskazna logika*

- standardni skup aksioma klasične iskazne logike

R1. pravilo *modus ponens*

(II) *principi znanja* (aksiomi i pravila sustava $\mathbf{T}$ za svaki K_i)

B1$_i$. $K_i(F \to G) \to (K_i F \to K_i G)$

B2$_i$. $K_i F \to G$

R2$_i$. $\vdash F \Rightarrow \vdash K_i F$

(III) *principi evidencije* (aksiomi i pravila logike dokaza $\mathbf{LP}$)

E1. $s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to (s \cdot t){:}G)$ (primjena)

E2. $t{:}F \to !t{:}t{:}F$ (inspekcija)

E3. $s{:}F \to (s + t){:}F$, $t{:}F \to (s + t){:}F$ (zbroj)

E4. $t{:}F \to F$ (faktivnost)

R3. (*pravilo specifikacije konstanti*) $\vdash c{:}A$, gdje je A aksiom od (I) do (IV), a c je konstanta

(IV) princip povezivanja evidencije i znanja

C1. $t{:}F \to K_i F$ (nepobitnost evidencije).

Za razliku od Artemova, uvodimo prihvaćenost i znanjotvornost opravdanja te principi evidencije vrijede i općenito za opravdanja i posebno za prihvaćena, a posebno za znanjotvorna opravdanja. Artemov preuzima epistemičke modalne aksiome, no u nas se epistemični $\mathbf{K}$ i $\mathbf{T}$ mogu izvesti pomoću opravdanja, jer operatore K i B definirali smo pomoću prihvaćenosti i znanjotvornosti opravdanja. Artemov ne rabi doksastične aksiome, odnosno ne uvrštava operator B, a princip povezivanja evidencije i znanja u nas ne vrijedi jer ga smatramo prejakom tvrdnjom. Nepobitnost evidencije značila bi da imati opravdanje za kakvu tvrdnju znači da znamo tu tvrdnju, što je adekvatno logici dokaza, ali ne nužno i inačicama logike opravdanja. Definirali smo znanje pomoću postojanja opravdanja koje mora biti prihvaćeno i znanjotvorno, naime nije dovoljno imati bilo kakvo opravdanje. Prvo, činitelj ga mora prihvatiti. Možemo imati vrlo jaku evidenciju za kakvu tvrdnju, a da je činitelj odbacuje (npr. ne vjeruje da Zemlja nije ravna ploča). Isto tako, to opravdanje mora biti i znanjotvorno, inače bi bilo kakvo opravdanje vodilo do znanja, čak i ono pogrešno ili slabo (npr. netko mi je rekao da je Zemlja ravna ploča kao indirektni reportativni evidencijal). Po definiciji 14 operatora znanja (str. 86) znanje proizvode samo ona opravdanja koja su znanjotvorna i prihvaćena. Premda je svako znanjotvorno ili prihvaćeno opravdanje ujedno i opće opravdanje (Ax8), obratno ne vrijedi.

Po definiciji 17 na str. 87 uveli smo epistemične i doksastične aksiome, za koje ćemo dokazati da su teoremi ovoga sustava. Cilj je pokazati kako se aksiomi epistemične logike **S4** i aksiomi doksastične logike **KD4** mogu izvesti iz aksioma logike $\mathbf{EVL}^-$, odnosno kako je naša logika na neki način nadskup takvih logika[110]

Dokažimo teorem 1 ($K(F \to G) \to (KF \to KG)$):

Dokaz.

1)$\{K(F \to G), KF\}$	$\vdash$	$K(F \to G)$	op.
2)$\{K(F \to G), KF\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:_A}(F \to G) \land x{:_E}(F \to G))$	1 def. 14
3)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G)\}$	$\vdash$	KF	op.
4)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G)\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:_A}F \land x{:_E}F)$	3 def. 14
5)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G)$	op.
6)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$v{:_A}F \land v{:_E}F$	op.
7)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$u{:_A}(F \to G)$	5 i$\land$
8)$\{K(F \to G), KF\ u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$u{:_A}(F \to G) \to (v{:_A}F \to (u \cdot v){:_A}G)$	Ax5
9)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$v{:_A}F \to (u \cdot v){:_A}G$	8, 7 i$\to$
10)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$u{:_E}(F \to G) \to (v{:_E}F \to (u \cdot v){:_E}G)$	Ax5
11)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G), v{:_A}F \land v{:_E}F\}$	$\vdash$	$u{:_E}(F \to G)$	5 i$\land$
12)$\{K(F \to G), KF, u{:_A}(F \to G) \land u{:_E}(F \to G)\}$	$\vdash$	$v{:_E}F \to (u \cdot v){:_E}G$	10, 11 i$\to$
13)$\{K(F \to G), KF,$	$\vdash$	$v{:_A}F$	6 i$\land$

[110] Rabimo sustav horizontalne notacije za prirodnu dedukciju, v. [70] i [71].

$u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$			
$14)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$	$\vdash$	$v{:}_E F$	6 i$\wedge$
$15)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$	$\vdash$	$(u \cdot v){:}_A G$	9, 13 i$\to$
$16)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$	$\vdash$	$(u \cdot v){:}_E G$	12, 14 i$\to$
$17)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$	$\vdash$	$(u \cdot v){:}_A G \wedge (u \cdot v){:}_E G$	15, 16 u$\wedge$
$18)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:}_A G \wedge x{:}_E G)$	17 u$\exists$
$19)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G), v{:}_A F \wedge v{:}_E F\}$	$\vdash$	KG	18 def. 14
$20)\{K(F \to G), KF,$ $u{:}_A(F \to G) \wedge u{:}_E(F \to G)\}$	$\vdash$	KG	4, 19 i$\exists$
$21)\{K(F \to G), KF\}$	$\vdash$	KG	2, 20 i$\exists$
$22)\{K(F \to G)\}$	$\vdash$	$KF \to KG$	21 u$\to$
$23)$	$\vdash$	$K(F \to G) \to (KF \to KG)$	22 u$\to$

$\square$

Dokažimo teorem 2 ($KF \to F$):

Dokaz.

$1)\{KF\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	def. 14
$2)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \wedge u{:}_E F$	op.
$3)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_E F$	2 i$\wedge$
$4)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_E F \to F$	Ax10
$5)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	F	4, 3 i$\to$
$6)\{KF\}$	$\vdash$	F	1, 5 i$\exists$

7)	$\vdash$	$KF \to F$	6 u$\to$

$\square$

Dokažimo teorem 3 ($KF \to KKF$):

Dokaz. i

1)$\{KF\}$	$\vdash$	KF	op.
2)$\{KF\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	1 def. 14
3)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \wedge u{:}_E F$	op.
4)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F$	3 i$\wedge$
5)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_E F$	3 i$\wedge$
6)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \to !u{:}_A u{:}_A F$	Ax7
7)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$!u{:}_A u{:}_A F$	6, 4 i$\to$
8)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \to \exists y\, y{:}_A u{:}_E F$	Ax11
9)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists y\, y{:}_A u{:}_E F$	8, 4 i$\to$
10)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$v{:}_A u{:}_E F$	op.
11)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$v{:}_A u{:}_E F \to (!u + v){:}_A u{:}_E F$	Ax6
12)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$(!u + v){:}_A u{:}_E F$	11, 10 i$\to$
13)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$!u{:}_A u{:}_A F$	7 st. 3
14)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$!u{:}_A u{:}_A F \to (!u + v){:}_A u{:}_A F$	Ax6
15)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$(!u + v){:}_A u{:}_A F$	14, 13 i$\to$
16)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$(!u + v){:}_A u{:}_A F \wedge (!u + v){:}_A u{:}_E F$	15, 12 u$\wedge$
17)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$((!u + v){:}_A u{:}_A F \wedge (!u + v){:}_A u{:}_E F) \to (!u + v){:}_A (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	Ax4
18)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$(!u + v){:}_A (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	17, 16 i$\to$

19) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_E F$	5 st. 3
20) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_E F \to !u{:}_E u{:}_E F$	Ax7
21) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$!u{:}_E u{:}_E F$	20, 19, i$\to$
22) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F$	4 st. 3
23) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \to \exists z\, z{:}_E u{:}_A F$	Ax12
24) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists z\, z{:}_E u{:}_A F$	23, 22 i$\to$
25) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$w{:}_E u{:}_A F$	op.
26) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$w{:}_E u{:}_A F \to (!u + w){:}_E u{:}_A F$	Ax6
27) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u + w){:}_E u{:}_A F$	26, 25 i$\to$
28) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$!u{:}_E u{:}_E F$	21 st. 3
29) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$!u{:}_E u{:}_E F \to (!u + w){:}_E u{:}_E F$	Ax6
30) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u + w){:}_E u{:}_E F$	29, 28 i$\to$
31) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u + w){:}_E u{:}_A F \wedge (!u + w){:}_E u{:}_E F$	27, 30 u$\wedge$
32) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$((!u + w){:}_E u{:}_A F \wedge (!u + w){:}_E u{:}_E F)$ $\to (!u + w){:}_E (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	Ax4
33) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u + w){:}_E (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	32, 31 i$\to$
34) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u + w){:}_E (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$ $\to ((!u + v) + (!u + w)){:}_E (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	Ax6
35) $\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u + v) + (!u + w)){:}_E (u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	34, 33 i$\to$

36)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u+v){:}_A(u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	18 st. 3
37)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(!u+v){:}_A(u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$ $\rightarrow ((!u+v)+(!u+w){:}_A(u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	Ax6
38)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$((!u+v)+(!u+w){:}_A(u{:}_A F \wedge u{:}_E F)$	37, 36 i$\rightarrow$
39)$\{u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \wedge u{:}_E F$	op.
40)$\{u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	39, u$\exists$
41)$\{\}$	$\vdash$	$(u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A \wedge x{:}_E F)$	40, u$\rightarrow$
42)$\{\}$	$\vdash$	$c{:}((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A \wedge x{:}_E F))$	41 nec.
43)$\{\}$	$\vdash$	$c{:}((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A \wedge x{:}_E F))$ $\rightarrow c{:}_A((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	Ax13
44)$\{\}$	$\vdash$	$c{:}((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A \wedge x{:}_E F))$ $\rightarrow c{:}_E((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	Ax13
45)$\{\}$	$\vdash$	$c{:}_A((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	43, 42 i$\rightarrow$
46)$\{\}$	$\vdash$	$c{:}_E((u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	44, 42 i$\rightarrow$
47)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$c{:}_A((u{:}_A F \wedge u{:}_E F \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)))$	45 st. 3
48)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$c{:}_A((u{:}_A F \wedge u{:}_E F \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)))$ $\rightarrow (((!u+v)+(!u+w)){:}_A(u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow$ $(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	Ax1
49)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$((!u+v)+(!u+w)){:}_A(u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow$ $(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	48, 47 i$\rightarrow$
50)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	49, 38 i$\rightarrow$
51)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$c{:}_E((u{:}_A F \wedge u{:}_E F \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)))$	46 st. 3
52)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$c{:}_E((u{:}_A F \wedge u{:}_E F \rightarrow \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)))$ $\rightarrow (((!u+v)+(!u+w)){:}_E(u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow$ $(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	Ax1
53)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$((!u+v)+(!u+w)){:}_E(u{:}_A F \wedge u{:}_E F) \rightarrow$ $(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	48, 47 i$\rightarrow$
54)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	53, 35 i$\rightarrow$
55)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F,$ $v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$(c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$ $\wedge (c \cdot ((!u+v)+(!u+w))){:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	50, 54 u$\wedge$

56)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F, w{:}_E u{:}_A F\}$	$\vdash$	$\exists y(y{:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F) \wedge y{:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	55 u$\exists$
57)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F, v{:}_A u{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists y(y{:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F) \wedge y{:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	24, 56 i$\exists$
58)$\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists y(y{:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F) \wedge y{:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	9, 57 i$\exists$
59)$\{KF\}$	$\vdash$	$\exists y(y{:}_A \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F) \wedge y{:}_E \exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F))$	2, 58 i$\exists$
60)$\{KF\}$	$\vdash$	KKF	59 def. 14
61)$\{\}$	$\vdash$	$KF \rightarrow KKF$	60, u$\rightarrow$

$\square$

Dokažimo teorem 4 ($KF \rightarrow \neg K \neg F$):

Dokaz.

1)$\{KF\}$	$\vdash$	KF	op.
2)$\{KF, K\neg F\}$	$\vdash$	$K\neg F$	op.
3)$\{KF, K\neg F\}$	$\vdash$	F	1 TH2
4)$\{KF, K\neg F\}$	$\vdash$	$\neg F$	2 TH2
5)$\{KF, K\neg F\}$	$\vdash$	$\neg K \neg F$	3, 4 EFQ
6)$\{KF\}$	$\vdash$	$\neg K \neg F$	5 i$\neg$
7)	$\vdash$	$KF \rightarrow \neg K \neg F$	13 u$\rightarrow$

$\square$

Dokažimo teorem 5 ($B(F \to G) \to (BF \to BG)$):

Dokaz.

1)$\{B(F \to G)\}$	$\vdash$	$\{B(F \to G)\}$	op.
2)$\{B(F \to G)\}$	$\vdash$	$\exists x\, x{:}_A(F \to G)$	1 def. 13
3)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G)\}$	$\vdash$	BF	op.
4)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G)\}$	$\vdash$	$\exists y\, y{:}_A F$	3 def. 13
5)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	$u{:}_A(F \to G)$	op.
6)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	$v{:}_A F$	op.
7)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	$u{:}_A(F \to G) \to (v{:}_A F \to (u \cdot v){:}_A G)$	Ax5
8)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	$v{:}_A F \to (u \cdot v){:}_A G$	7, 5 i$\to$
9)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	$(u \cdot v){:}_A G$	8, 6 i$\to$
10)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	$\exists z\, z{:}_A G$	9 u$\exists$
11)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G), v{:}_A F\}$	$\vdash$	BG	10 def. 13
12)$\{B(F \to G), BF, u{:}_A(F \to G)\}$	$\vdash$	BG	4, 11 i$\exists$
13)$\{B(F \to G), BF\}$	$\vdash$	BG	2, 12 i$\exists$
14)$\{B(F \to G)\}$	$\vdash$	$BF \to BG$	13 u$\to$
14)	$\vdash$	$B(F \to G) \to (BF \to BG)$	14 u$\to$

$\square$

Dokažimo teorem 6 ($BF \to \neg B \neg F$):

Dokaz.

1)$\{BF\}$	$\vdash$	BF	op.
2)$\{BF\}$	$\vdash$	$\exists x\, x{:}_A F$	1 def. 13
3)$\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F$	op.
4)$\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \to \neg \exists y{:}_A \neg F$	Ax9
5)$\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$\neg \exists y{:}_A \neg F$	4, 3 i$\to$
6)$\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$\neg B \neg F$	5 def. 13
7)$\{BF\}$	$\vdash$	$\neg B \neg F$	2, 6 i$\exists$
8)	$\vdash$	$BF \to \neg B \neg F$	7 u$\to$

$\square$

Dokažimo teorem 7 ($BF \to BBF$):

Dokaz.

$1)\{BF\}$	$\vdash$	BF	op.
$2)\{BF\}$	$\vdash$	$\exists x\, x{:}_A F$	1 def. 13
$3)\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F$	op.
$4)\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \to !u{:}_A u{:}_A F$	Ax7
$5)\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	$!u{:}_A u{:}_A F$	4, 3 i$\to$
$6)\{BF, u{:}_A F\}$	$\vdash$	BBF	5 def. 13
$7)\{BF\}$	$\vdash$	BBF	2, 6 i$\exists$
8)	$\vdash$	$BF \to BBF$	7 u$\to$

$\square$

Dokažimo teorem 8 ($KF \to BF$):

Dokaz.

$1)\{KF\}$	$\vdash$	KF	(op.)
$2)\{KF\}$	$\vdash$	$\exists x(x{:}_A F \wedge x{:}_E F)$	1 def. 14
$3)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F \wedge u{:}_E F$	op.
$4)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$u{:}_A F$	3 i$\wedge$
$5)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	$\exists y\, y{:}_A F$	4 u$\exists$
$6)\{KF, u{:}_A F \wedge u{:}_E F\}$	$\vdash$	BF	5 def. 13
$7)\{KF\}$	$\vdash$	BF	2, 6 i$\exists$
8)	$\vdash$	$KF \to BF$	7 u$\to$

$\square$

f: Izveli smo standardne aksiome epistemične logike **S4** i doksastične logike **KD4** iz aksioma sustava $\mathbf{EVL}^{-}$. Shodno tomu možemo zaključiti kako se epistemična logika i doksastična logika mogu u našoj interpretaciji smatrati podskupom evidencijalne logike, koja spaja znanje, vjerovanje i opravdanje s naglaskom na evidenciju u jednu cjelinu.

Jedini nama poznat korak takva eksplicitnoga povezivanja donio je Artemov [14], koji uz aksiome opravdanja uvodi i aksiom nepobitnosti znanja, odnosno uvodi se $t{:}\phi \rightarrow K_i\phi$, uz standardne aksiome epistemične pozitivne i negativne introspekcije, koji je adekvatan logici dokaza, ali prejak je uvjet za opis evidencijalnosti. Smatramo kako su takvi pojmovi međusobno neodvojivi u zaključivanju u prirodnom jeziku, a posebice u evidencijalnim jezicima, gdje pojam direktnih i indirektnih opravdanja povlači pozadinske pretpostavke i znanja i vjerovanja.

Sličan primjer tomu nalazi se i u [27], gdje Baltag, Renne i Smets valoriziraju eksplicitnost i konstruktivnost evidencije, a semantika se temelji na Fittingovim modelima. Međutim, njihova je primarna motivacija razriješiti gettierovske primjere te ne obuhvaćaju mogućnost da govornik i ne prihvati eksplicitnu konkluzivnu evidenciju, što može biti slučaj u prirodnom jeziku. Također, u njihovu jeziku ne nalazi se provjerivač dokaza, što je bitna odlika i unutar evidencijalnosti, jer smatramo da se na istoj tvrdnji – kako je poznato – mogu drugi evidencijali više hijerarhije rabiti kao provjerivači slabijih evidencijala.

5.3.6 Napomena

Kako bismo uspjeli dokazati pozitivnu introspekciju, morali smo uvesti aksiom Ax9: $t{:}_A F \rightarrow \exists y\, y{:}_A x{:}_E F$, koji govori da ako govornik prihvaća neko opravdanje za neku formulu, onda on smatra da je to opravdanje znanjotvorno, premda to ne mora biti slučaj. Bez ovoga aksioma logika bi bila slabija i govorila bi samo o tranzitivnosti vjerovanja ($BF \rightarrow BBF$). Prihvatimo li kakvu eksternalističku teoriju opravdanja, govornik može imati opravdanje za F proizvedeno na pouzdan način, a da doista ne zna da zna F, odnosno da ne slijedi tranzitivnost. Primjerice, govornik može imati opravdanje iz druge ruke za neku formulu – npr. reportativni evidencijal "netko mi je rekao da neki poučak vrijedi" – i prihvatiti to, ali to ne mora značiti da govornik zna da zna taj poučak.

$t{:}_A F \vdash BF$

Artemov u [14, str. 8.] uvodi aksiom nepobitnosti evidencije: $t{:}F \rightarrow K_iF$, no u kontekstu evidencijalnosti takav se aksiom čini prejakim te umjesto njega vrijedi teorem $t{:}_A \rightarrow BF$, odnosno posjedovanje opravdanja ne mora nužno voditi do znanja, ali tomu ne vodi niti posjedovanje opravdanja koje je prihvaćeno – ono samo vodi do vjerovanja.

Teorem $t{:}_AF \vdash BF$ lako se izvodi u sustavu $\mathbf{EVL}^-$. Pretpostavimo da uvijek vrijedi $t{:}_AF$. Instancijacijom i uvođenjem egzistencijalnoga kvantifikatora trivijalno pozivom na definiciju 13 operatora vjerovanja dobivamo da vrijedi BF.

$$t{:}_EF \nvdash KF$$

U sustavu neće vrijediti $t{:}_EF \rightarrow KF$, odnosno ako govornik ima znanjotvorno opravdanje, to ne vodi do znanja osim ako to opravdanje govornik ujedno i prihvaća – moguće je imati govornika koji ne prihvaća neke tvrdnje koje se smatraju znanjem (primjerice ne prihvaća opravdanje da Zemlja nije ravna ploča), što je bilo oprimjereno na str. 61 u tibetskom primjeru gdje govornik ne prihvaća vijest koja se smatrala znanjem. Shodno tomu ne vrijedi niti da govornik mora vjerovati na temelju znanjotvornoga opravdanja, odnosno neće vrijediti niti $t{:}_EF \rightarrow BF$, a tako niti obrat.

5.3.7 Pouzdanost sustava EVL⁻

U ovom potpoglavlju dokazat ćemo pouzdanost (*soundness*) sustava $\mathbf{EVL}^-$:

Poučak 1 (Pouzdanost logike $\mathbf{EVL}^-$)**.** Ako $\Gamma \vdash_* F$, onda $\Gamma \vDash_* F$.

Dokaz. Sustav $\mathbf{EVL}^-$ sustav je prirodne dedukcije te se poučkom o pouzdanosti tvrdi da dokazna pravila čuvaju istinitost. Koristeći se matematičkom indukcijom na broj retka u dokazu, tvrdnja se dokazuje za prvi redak dokaza, a zatim za svaki redak $n+1$, pri čemu je induktivna hipoteza da ako posljedični odnos vrijedi u retku n i svim prethodnim redcima dokaza, onda vrijedi i za redak $n+1$. Osnovicom tvrdimo da posljedični odnos dokaza vrijedi u prvom retku dokaza. Zaglavak govori da tvrdnja vrijedi za svaki redak u dokazu.

Dokazujemo osnovicu. Iskaz u osnovici ili je pretpostavka ili iskaz dobiven primjenom pravila ($\mathrm{Ax_n}$) iz definicije 4 na str. 71. U slučaju da je F pretpostavka, $\Gamma = \{F\}$ i vrijedi $\{F\} \vDash_* F$. Iskaz može biti i oblika neke od aksiomatskih shema iz definicije 4 na str. 71 te dokazujemo da je svaki iskaz oblika neke od aksiomatskih shema valjan.

Ax1: $s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to (s \cdot t){:}G)$. Pretpostavimo da $\vDash_{*,\mathcal{V}} s{:}(F \to G)$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F$. Slijedi $(F \to G) \in \phi(\mathcal{O}(s))$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ po uvjetima istinitosti iz definicije 9 (str. 80). Po uvjetu zatvorenosti iz definicije 8 (str. 76) za aplikaciju vrijedi $G \in \phi(\mathcal{O}(s \cdot t))$, odnosno po definiciji 9 slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} (s \cdot t){:}G$.

Ax2: $s{:}F \to (s+t){:}F$, $t{:}F \to (t+s){:}F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} s{:}F$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi da je $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$. Po definiciji 8 i uvjetu zatvorenosti za zbroj vrijedi da ako je $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$, onda je $F \in \phi(\mathcal{O}(s+t))$. Po definiciji 8 i uvjetima istinitosti slijedi da $\vDash_{*,\mathcal{V}} (s+t){:}F$. Analogno se dokazuje i za drugi oblik aksioma.

Ax3: $t{:}F \to\ !t{:}t{:}F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 9 slijedi $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$. Po definiciji 8 i uvjetu zatvorenosti za provjerivač dokaza vrijedi da ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, onda $t{:}F \in \phi(\mathcal{O}(!t))$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 9 slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ !t{:}t{:}F$.

Ax4: $(t{:}F \wedge t{:}G) \to t{:}(F \wedge G)$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}F \wedge t{:}G$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 9 slijedi $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $G \in \phi(\mathcal{O}(t))$, a po uvjetu zatvorenosti za konjunkciju definicije 8 slijedi $(F \wedge G) \in \phi(\mathcal{O}(t))$ te po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}(F \wedge G)$.

Ax5: $s{:}_A(F \to G) \to (t{:}_A F \to (s \cdot t){:}_A G)$. Pretpostavimo da $\vDash_{*,\mathcal{V}} s{:}_A(F \to G)$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_A F$. Iz njih slijedi $(F \to G) \in \phi(\mathcal{O}(s))$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ te $\mathcal{O}(t), \mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$ po uvjetima istinitosti iz definicije 9. Po uvjetu iz definicije 8 za aplikaciju vrijedi $G \in \phi(\mathcal{O}(s \cdot t))$ i $\mathcal{O}(s \cdot t) \in \mathcal{A}$, odnosno po definiciji 9 uvjeta istinitosti za prihvaćena opravdanja slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} (s \cdot t){:}_A G$. Dokaz za primjenu znanjotvornih opravdanja – $s{:}_E(F \to G) \to (t{:}_E F \to (s \cdot t){:}_E G)$ – slijedi analogno, samo što se radi o skupu $\mathcal{E}$.

Ax6: $s{:}_A F \to (s+t){:}_A F$, $t{:}_A F \to (t+s){:}_A F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} s{:}_A F$. Po definiciji 9 i uvjetima istinitosti slijedi da je $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$. Po definiciji 8 i uvjetu za zbroj vrijedi da ako je $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$ i $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$, onda je $F \in \phi(\mathcal{O}(s+t))$ i $\mathcal{O}(s+t) \in \mathcal{A}$. Po definiciji 8 i uvjetima istinitosti za prihvaćena opravdanja slijedi da $\vDash_{*,\mathcal{V}} (s+t)_A{:}F$. Analogno se dokazuje i za drugi oblik aksioma te za znanjotvorna opravdanja – $s{:}_E F \to (s+t){:}_E F$, $t{:}_E F \to (t+s){:}_E F$ – samo što će se raditi o skupu $\mathcal{E}$.

Ax7: $t{:}_A \rightarrow\ !t{:}_A t{:}_A F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}_A F$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 9 slijedi $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$. Po definiciji 8 i uvjetu za provjerivač dokaza u skupu prihvaćenih opravdanja vrijedi da ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$, onda $t{:}F \in \phi(\mathcal{O}(!t))$ i $\mathcal{O}(!t) \in \mathcal{A}$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 9 za prihvaćena opravdanja slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ !t{:}_A t{:}_A F$. Analogno se dokazuje i za znanjotvorna opravdanja – $t{:}_E \rightarrow\ !t{:}_E(t{:}_E F)$ – samo što će se raditi o skupu $\mathcal{E}$.

Ax8: $t{:}_A F \rightarrow t{:}F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}_A F$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi da $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$, a potonje nam je dovoljno za $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}F$ te trivijalno slijedi po istoj definiciji. Na isti način, samo sa skupom $\mathcal{E}$, dokazujemo i za znanjotvorna opravdanja: $t{:}_E F \rightarrow t{:}F$.

Ax9: $t{:}_A F \rightarrow \neg\exists y{:}_A \neg F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}_A F$. Po definiciji 9 uvjeta istinitosti slijedi da postoji neki $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ te po definiciji 8 uvjeta zatvorenosti za prihvaćena opravdanja slijedi da za bilo koji $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$ vrijedi $\neg F \notin \phi(\mathcal{O}(s))$. Slijedi, uz definiciju 9 za prihvaćena opravdanja i istinitost egzistencijalnoga kvantifikatora, $\nvDash_{*}\ \exists y{:}_A \neg F$ te po definiciji negacije $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ \neg\exists y{:}_A \neg F$. Analogno slijedi i za znanjotvorna opravdanja ($t{:}_E F \rightarrow \neg\exists y{:}_E \neg F$), samo se radi o skupu $\mathcal{E}$.

Ax10: $t{:}_E F \rightarrow F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}_E F$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 za znanjotvorna opravdanja slijedi $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{E}$. Po definiciji 8 uvjeta zatvorenosti slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ F$.

Ax11: $t{:}_A F \rightarrow \exists y\, y{:}_A x{:}_E F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}_A F$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ i $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$. Po uvjetu zatvorenosti iz definicije 8 za skupove znanjotvornih i skupove prihvaćenih opravdanja slijedi iz $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$ da postoji neki $s{:}_A t{:}_E F$ te prema uvjetima istinitosti, odnosno uvjetu istinitosti egzistencijalnoga kvantifikatora, slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ \exists y\, y{:}_A x{:}_E F$.

Ax12: $t{:}_A F \rightarrow \exists x\, x{:}_E t{:}_A F$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}}\ t{:}_A F$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$. Po uvjetima zatvorenosti definicije 8 slijedi da $t{:}_A F \in \phi(\mathcal{O}(s)$ za neki $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{E}$. Prema uvjetima istinitosti za znanjotvorna opravdanja i za egzistencijalni kvantifikator, slijedi $\exists x\, x{:}_E t{:}_A F$.

Ax13: $c{:}F \rightarrow c_\alpha{:}F$. Pretpostavimo $c{:}F$. Prema uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi da je $F \in \phi(\mathcal{O}(c))$. Prema uvjetima modela (str. 76) slijedi da je $c \in \mathcal{A}$ te stoga $c{:}_A F$. Analogno slijedi $c \in \mathcal{E}$ te stoga $c{:}_E F$. Odnosno, slijedi $c{:}_\alpha F$ jer $\alpha \in \{A, E\}$ (po definiciji 24 na str. 113).

Dokazima aksioma dokazali smo osnovicu matematičke indukcije. Induktivnim korakom želimo reći da pravila vrijede i u svakom daljnjem retku, odnosno ako $\Gamma_n \vdash_* F$, onda $\Gamma_n \vDash_* F$ u retku n, onda to vrijedi i za redak $n+1$. Odnosno za svaki redak n u dokazu vrijedi da skup Γ_n pretpostavki koje vrijede u tom retku n ima kao semantičku posljedicu iskaz upisan u redak n ako je taj iskaz ispravno deduktivno izveden iz Γ_n [99, str. 24]. Iz retka n u redak $n+1$ možemo prijeći ili pretpostavkom (dokazano u osnovici) ili primjenom pravila iz definicije 4 (str. 71).

Pravila se dokazuju klasičnim metodama – indukcija po retku dokaza (usp. [99, str. 26-28]. Primjerice za pravilo (i→) (isključenje pogodbe) u retku i, $i \leq n$ imamo $\Gamma \vdash F \rightarrow G$. U retku j, $j \leq n$, $\Gamma \vdash F$ te u retku $n+1$ vrijedi $\Gamma \vdash G$. Po induktivnoj hipotezi, jer su i i $j \leq n$, slijedi $\Gamma \vDash_{*,\mathcal{V}} F \rightarrow G$ i $\Gamma \vDash_{*,\mathcal{V}} F$. Iz toga slijedi $\Gamma \vDash_{*,\mathcal{V}} G$ po semantici pogodbe.

Pravila su pouzdana i za kvantifikatore, primjerice dokazujemo pouzdanost pravila (i∃) (isključenje egzistencijalnoga kvantifikatora). Neka u retku $n+1$, $\Gamma \vdash G$ i to je dobiveno pravilom $i\exists$. Pretpostavimo da ima neki redak $i \leq n$ takav da $\Gamma \vdash \exists x F$ i ima neki redak $j \leq n$ takav da $\Gamma, F(u/x) \vdash G$. Zbog induktivne hipoteze vrijedi 1) $\Gamma \vDash \exists x F$ i 2) $\Gamma, F(u/x) \vDash G$, pri čemu se u ne javlja niti u pretpostavkama Γ, niti u $\exists x F$, niti u G. Za *reductio* pretpostavimo da 3) $\Gamma \nvDash G$. Tada slijedi da ima model $\mathcal{M}$ takav da 4) $\mathcal{M} \vDash \Gamma$, ali 5) $\mathcal{M} \nvDash G$. Iz 2), 4), 5) slijedi da $\mathcal{M} \nvDash F(u/x)$. Iz 4) i 1) slijedi 6) $\mathcal{M} \vDash \exists x F$. Iz 6) i definicije 9 (str. 80) uvjeta istinitosti slijedi da ima neki predmet $d \in \mathcal{D}$ takav da $\mathcal{M} \vdash F[d/x]$, odnosno d zadovoljava F. Uzmimo model $\mathcal{M}'$ koji se razlikuje od $\mathcal{M}$ samo po značenju oznake u, odnosno po $\mathcal{O}(u)$, koje je u $\mathcal{M}'$ upravo predmet d koji zadovoljava F. Modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ ne razlikuju se s obzirom na Γ (u Γ se ne nalazi oznaka u po definiciji 4, stoga, kao i u $\mathcal{M}$, slijedi 7) $\mathcal{M}' \vDash \Gamma$. Slijedi 8) $\mathcal{M}' \vDash F(u/x)$ jer predmet d zadovoljava F (jer u u modelu $\mathcal{M}$ označava predmet d za koji smo prethodno ustvrdili da zadovoljava F). Iz 2), 7), 8) slijedi 9) $\mathcal{M}' \vDash G$. No kako G ne sadržava u, a $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ ne razlikuju se s obzirom na G, stoga G mora biti neistinito u $\mathcal{M}'$ jer je neistinito u $\mathcal{M}$, odnosno $\mathcal{M}' \nvDash G$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\mathcal{M}' \vDash \neg G$. Konačno stoga zbog kontradikcije s 9) vrijedi $\Gamma \vDash G$. $\square$

Time smo dokazali pouzdanost redaka dobivenih tipičnim pravilima dokazivanja iz naših strukturnih pravila iz definicije 4 (str. 71) te nakon dokaza osnovice i aksioma te tipičnih pravila dokazivanja slijedi da je istinitost iskaza F očuvana u svakom retku dokaza u našem sustavu, odnosno: ako $\Gamma \vdash_* F$, onda $\Gamma \vDash_* F$ te je sustav $\mathbf{EVL}^-$ pouzdan.

5.3.8 Potpunost sustava EVL^{-}

Za dokaz potpunosti koristimo se dokazom u Henkin-Lindenbaumovu stilu uz pomoć kanonskoga modela. Prvo ćemo krenuti od suvislosti sustava, definirati maksimalan suvisao skup iskaza i članstvo u njemu. Potom ćemo zbog logike prvoga reda definirati ω-potpune te zatim zasićene skupove. Izgradit ćemo kanonski model i pokazati kako je zasićen skup iskaza zadovoljiv kanonskim modelom, a naposljetku ćemo dokazati sam poučak o potpunosti.

Definicija 18 (Maksimalan suvisao skup iskaza)**.** Γ^{max} jest maksimalan suvisao skup iskaza akko je Γ^{max} suvisao, a svaki pravi nadskup skupa Γ^{max} nesvisao. [99, str. 31]

Stavak 10 (Članstvo dokažljivoga iskaza u Γ^{max})**.** Ako je iskaz F dokažljiv iz maksimalnoga suvisloga skupa Γ^{max}, onda je F član Γ^{max}:

ako $\Gamma^{max} \vdash F$, onda $F \in \Gamma^{max}$.

Dokaz. Dokaz (prema [99, str. 32]): neka je Γ^{max} maksimalan suvisao skup i neka $\Gamma^{max} \vdash F$. Neka $F \notin \Gamma^{max}$, stoga je prema definiciji 18 $\Gamma^{max} \cup F$ nesuvisao, a prema definiciji 5 slijedi $\Gamma^{max} \vdash \neg F$. S obzirom na pretpostavku $\Gamma^{max} \vdash F$ slijedi da je Γ^{max} nesuvisao po definiciji 5. No Γ^{max} suvisao je po pretpostavci, stoga je $F \in \Gamma^{max}$. $\square$

Lema 1 (Članstvo u maksimalnom suvislom skupu za $\neg, \vee, \rightarrow, \wedge$)**.** Ako je Γ^{max} maksimalan suvisao skup, onda:

- $\neg F \in \Gamma^{max}$ akko $F \notin \Gamma^{max}$
- $F \vee G \in \Gamma^{max}$ akko $F \in \Gamma^{max}$ ili $G \in \Gamma^{max}$
- $F \rightarrow G \in \Gamma^{max}$ akko $F \notin \Gamma^{max}$ ili $G \in \Gamma^{max}$
- $F \wedge G \in \Gamma^{max}$ akko $F \in \Gamma^{max}$ i $G \in \Gamma^{max}$.

Dokaz. Prva dva dokaza izvodimo prema [99, str. 35]. Dokaz za prvo članstvo slijedi. Dokažimo u prvom smjeru: neka je $\neg F \in \Gamma^{max}$ i neka je $F \in \Gamma^{max}$. Dakle $\{F, \neg F\} \subseteq \Gamma^{max}$, što znači da je Γ^{max} nesuvisao, što protuslovi pretpostavci.

Dokažimo u drugom smjeru: neka $F \notin \Gamma^{max}$. Dakle, $\Gamma^{max} \cup \{F\}$ nesuvislo je po definiciji maksimalnoga suvisloga skupa 18. Dakle, $\Gamma^{max} \vdash \neg F$ po stavku 1. Dakle $\neg F \in \Gamma^{max}$ po stavku 10.

Dokaz za drugo članstvo slijedi. Dokažimo u prvom smjeru: neka je $F \vee G \in \Gamma^{max}$ i neka $F, G \notin \Gamma^{max}$. Dakle, $\{F \vee G, \neg F, \neg G\} \subseteq \Gamma^{max}$ kao u prvom članstvu, no zbog de Morganovih zakona klasične logike takav je skup nesuvisao. Dakle Γ^{max} suvisao je, što protuslovi pretpostavci. Dakle, $F \in \Gamma^{max}$ ili $G \in \Gamma^{max}$.

Dokažimo u drugom smjeru: neka je $G \in \Gamma^{max}$ ili $F \in \Gamma^{max}$. Dakle, $\{F\} \subseteq \Gamma^{max}$ ili $\{G\} \subseteq \Gamma^{max}$. Dakle, $\{F\} \vdash F \vee G$, $\{G\} \vdash F \vee G$ po pravilu (u $\vee$) iz definicije 4. Dakle, $F \vee G \in \Gamma^{max}$.

Dokaz za treće članstvo slijedi. Dokažimo u prvom smjeru: neka je $F \to G \in \Gamma^{max}$. Ili je $F \in \Gamma^{max}$ ili $F \notin \Gamma^{max}$. Ako $F \in \Gamma^{max}$ po klasičnoj logici $\{F \to G, F \vdash G\}$. Dakle, $G \in \Gamma^{max}$ po stavku 10. Ako je $F \notin \Gamma^{max}$, dokaz je gotov.

Dokažimo u drugom smjeru: neka je $F \notin \Gamma^{max}$ ili $G \in \Gamma^{max}$. Dakle $\{\neg F\} \subset \Gamma^{max}$ ili $\{G\} \subseteq \Gamma^{max}$. Dakle klasičnom logikom $\{\neg F\} \vdash \neg F \vee G$ te klasičnom logikom $\{\neg F\} \vdash F \to G$. Dakle, $F \to G \in \Gamma^{max}$ po stavku 10. Analogno $\{G\} \vdash \neg F \vee G$ te klasičnom logikom $\{\neg F\} \vdash F \to G$, dakle $F \to F \in \Gamma^{max}$ po stavku 10.

Dokaz za četvrto članstvo slijedi. Dokažimo u prvom smjeru: neka je $F \wedge G \in \Gamma^{max}$, dakle $\{F \wedge G\} \subseteq \Gamma^{max}$. Pravilom (i $\wedge$) iz definicije 4 izvodimo $\{F \wedge G\} \vdash F$ i $\{F \wedge G\} \vdash G$. Po stavku 10 slijedi $F \in \Gamma^{max}$ i $G \in \Gamma^{max}$.

Dokažimo u drugom smjeru: neka je $F \in \Gamma^{max}$ i $G \in \Gamma^{max}$. Onda $\{F, G\} \subseteq \Gamma^{max}$. Po pravilu (i $\wedge$) iz definicije 4 izvodimo $\{F, G\} \vdash F \wedge G$. Potom, prema stavku 10 dobivamo $F \wedge G \in \Gamma^{max}$. $\square$

Lema 2 (Lindenbaumova lema)**.** Svaki suvisao skup iskaza podskup je barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa.

Dokaz. Dokaz preuzimamo iz [99, str. 32-34]. Za proizvoljno izabran suvisao skup Γ gradi se nadskup Θ te treba pokazati kako je Θ maksimalan suvisao skup. Svi se iskazi jezika redaju u niz tipa $F_1, F_2, F_3, \ldots$, gdje svaki kao pokazatelj dobiva pozitivan cijeli broj. Polazi se od zadanoga suvisloga skupa iskaza $\Gamma = \Gamma_1$ te gledamo za iskaze jedan po jedan i dodajemo ih prethodno dobivenomu skupu ako i samo ako tako dobivamo i dalje suvisao skup, odnosno: $\Gamma_{n+1} \cup F_n$ akko je $\Gamma_{n+1} \cup F_n$ suvislo, inače $\Gamma = \Gamma_{n+1}$. Dobiva se niz skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$. Θ je unija svih skupova u izgrađenom nizu, odnosno skup koji sadržava iskaz koji je član barem jednoga skupa u tome nizu te slijedi $\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \Theta$.

Pretpostavimo da je Θ nesuvisao. Dokaz je konačan niz iskaza koji su pretpostavke ili su izvedeni prema pravilima te slijedi da ako je Θ nesuvisao, neki je njegov konačan podskup Δ nesuvisao, jer dokaz ima konačan skup pretpostavki. No Δ je podskup nekoga podskupa Γ_n iz skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ jer je svaki član Δ, koji je član Θ, morao biti dodan u koraku izgradnje skupa Θ. Tako je i Γ_n nesuvisao (prema stavku 4), što je u kontradikciji s izgradnjom niza podskupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, gdje je svaki skup Γ_i u nizu suvisao po načinu gradnje. Dakle, Θ je suvisao.

Pretpostavimo da je $\Theta \subset \Theta'$. Neka je Θ' suvisao, stoga ima takav F_i da $F_i \notin \Theta$ i $F_i \in \Theta'$. Po stavku 4 $\Theta \cup \{F_i\}$ suvisao je, a prema postupku izgradnje skupa Θ također i $\Gamma_i \cup \{F_i\}$. Prema postupku izgradnje skupa Θ slijedi $F_i \in \Gamma_{i+1}$, što je u kontradikciji s $F \notin \Theta$. Dakle, Θ' nije suvisao i stoga je svaki pravi nadskup skupa Θ nesuvisao, odnosno Θ nije pravi podskup nijednoga suvisloga skupa. □

Stavak 11 (Beskonačna zaliha novih oznaka)**.** Ako je Γ suvisao skup iskaza, a Γ^F skup nastao iz Γ množenjem svih pokazatelja na opravdavajućim oznakama s 2. Γ^F suvisao je akko je Γ suvisao.

Dokaz. Dokaz je prema [99, str. 36]. Ako je Γ^F nesuvisao, onda je i Γ nesuvisao, odnosno ako postoji protuslovlje iz Γ^F, gotovo jednak dokaz vrijedi i kao dokaz nesuvislosti za Γ, a razlika je u pokazateljima na oznakama zadanoga skupa i (ako je bilo potrebe) u novouvedenim oznakama (za isključenje egzistencijalnoga i uvođenje općega kvantifikatora). Zbog istoga razloga vrijedi i da ako je Γ nesuvisao, onda je i Γ^F nesuvisao. □

Definicija 19 (ω-potpun skup)**.** Skup Γ ω-potpun je akko za svaku formulu F s jedinom slobodnom varijablom x ima barem jedna opravdavajuća oznaka s iz skupa Tm takva da vrijedi: $\Gamma \cup \{\exists x F\} \vdash F(s/x)$ (usp. [99, str. 36]).

Lema 3 (ω-potpun skup)**.** Svaki suvisao skup samo s parnim pokazateljima na oznakama podskup je barem jednoga suvisloga ω-potpunoga skupa.

Dokaz. Dokaz donosimo prema [99, str. 36]. Sastoji se od dvaju dijelova: od izgradnje nadskupa za po volji izabran suvisao skup Γ u kojem opravdavajuće oznake imaju samo parne pokazatelje i od dokaza da je taj nadskup suvisao i ω-potpun skup.

Slično kao i u dokazu Lindenbaumove leme (lema 2) redamo u niz sve formule koje imaju samo jednu slobodnu varijablu, a koja se može u formuli javljati više puta te dobivamo $F_1, F_2, \ldots, F_n$, a također i prema pokazateljima i abecednom redu poredamo i sve opravdavajuće oznake: $s, s_1, s_2, \ldots$.

Neka je $\Gamma = \Gamma_1$. Skup Γ_2 tvori se tako da mu dodamo formulu $\exists x F_1 \to F_1(s/x)$, gdje F_1 sadržava opravdavajuću oznaku t, a s_1 prva je opravdavajuća oznaka u nizu koja nije sadržana ni u Γ_1 niti u F_1. Analogno se tvori dalje, odnosno općenito: $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x F_n \to F_n(s_n/x)\}$, pri čemu je F_n n-ta formula koja sadržava samo jednu opravdavajuću oznaku t, a s_n abecedno prva opravdavajuća oznaka koja nije sadržana u skupu Γ_n niti u F_n.

U drugom dijelu dokaza gradimo nadskup Λ koji je $\Lambda = \bigcup \Gamma_n$ te vrijedi da je $\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \Lambda$.

Prvo pokazujemo kako je Λ suvisao. $\Gamma_1 = \Gamma$ suvisao je po pretpostavci, odnosno po definiciji postupka izgradnje skupa Λ, a dalje pokazujemo matematičkom indukcijom za svaki redak u nizu za Γ_n da je Γ_i u retku i suvisao. Pretpostavimo da je Γ_n suvisao kao induktivnu hipotezu i da je Γ_{n+1} nesuvisao. Stoga bi $\Gamma_n \cup \{\exists x F_n \to F_n(s_n/x)\}$ bilo nesuvislo. Odnosno $\Gamma_n \vdash \neg(\exists x F_n \to F_n(s_n/x))$ po poopćenom stavku 1. Po deduktivnom sustavu $\Gamma_n \vdash \exists x F_n$ i $\Gamma_n \vdash \neg F_n(s_n/x)$ (negacija pogodbe kao konjunkcija). Potom slijedi $\Gamma_n \vdash \forall x \neg F_n$ kao uvođenje univerzalnoga kvantifikatora jer je s_n nova opravdavajuća oznaka, a potom dobivamo protuslovlje s $\Gamma_n \vdash \neg\exists x F_n$ po deduktivnom sustavu (međusobna zamjenjivost/definirljivost kvantifikatora). Dakle, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x F_n \to F_n(s_n/x)\}$ suvisao je.

U sklopu logike prvoga reda dodajemo i formulu $\exists x F$. Ako je ona konzistentna s prethodno izgrađenim skupom, dodajemo i njezinu instancijaciju supstitucijom, pri čemu je t nova opravdavajuća oznaka koja se dotad ne javlja u skupu.

Slijedi da je $\Lambda = \bigcup_n \Gamma_n$ suvisao jer je svaki član unije član barem jednoga Γ_n u nizu nadskupova suvisloga skupa Γ_1, što čuva suvislost po indukciji. Taj Λ proširimo bilo kojim egzistencijalnim iskazom $\exists x F$, pri čemu F ima x kao jedinu slobodnu varijablu. Po načinu gradnje skupa imamo $\exists x F \to F(s/x) \in \Lambda$, dakle $\Lambda \cup \{\exists x F\} \vdash F(s/x)$ isključenjem pogodbe. Stoga je Λ ω-potpun skup. □

Stavak 12 (ω-potpunost nadskupa ω-potpunoga skupa)**.** Ako je Γ_ω ω-potpun skup, onda je i svaki njegov nadskup Γ'_ω ω-potpun. [99, str. 39].

Dokaz. Dokaz izvodimo prema [99, str. 39]. Posljedice dokažljive iz Γ ostaju dokažljive i iz skupa Γ' po poopćenom stavku 3.

Neka $\Gamma_\omega \vdash \exists xF \rightarrow F(s/x)$ i neka $\Gamma_\omega \subseteq \Gamma'_\omega$, dakle $\Gamma'_\omega \vdash \exists xF \rightarrow F(s/x)$. Dakle, ako je Γ_ω ω-potpun, onda je i njegov nadskup Γ'_ω također ω-potpun. □

Definicija 20 (Zasićen skup)**.** Skup iskaza zasićen je ako je maksimalan suvisao i ω-potpun.

Lema 4 (Članstvo u zasićenom skupu)**.** Ako je Γ_ω^{max} zasićen skup, onda vrijede postavke iz leme 1 te:

- $\forall xF \in \Gamma_\omega^{max}$ akko za svaki $s, F(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$
- $\exists xF \in \Gamma_\omega^{max}$ akko za neki $s, F(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$.

Dokaz. Dokaz slijedi prema [99, str. 39/40]. Po prvom podstavku leme, $\forall xF \notin \Gamma_\omega^{max}$ akko $\neg\forall xF \in \Gamma_\omega^{max}$ po lemi 1. Potom $\forall xF \notin \Gamma_\omega^{max}$ akko $\exists x\neg F \in \Gamma_\omega^{max}$ po stavku 10. Zatim $\forall xF \notin \Gamma_\omega^{max}$ akko barem za jedan s, $\neg F(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ isključenjem pogodbe jer je Γ_ω^{max} ω-potpun. Potom $\forall xF \notin \Gamma_\omega^{max}$ akko nije za svaki $s, F(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ po stavku 1.

Za drugi podstavak leme dokaz se temelji na ω-potpunosti Γ_ω^{max} i isključenju pogodbe slijeva nadesno, a zdesna nalijevo na temelju uvođenja egzistencijalnoga kvantifikatora. □

Definicija 21 (Kanonski model logike $\mathbf{EVL}^-$)**.** Kanonski model logike $\mathbf{EVL}^-$ jest uređena osmorka:

$$*^{\mathrm{K}} = \langle \mathcal{D}^K, \mathcal{A}^K, \mathcal{E}^K, \mathcal{T}_0^K, \mathcal{T}^{\mathcal{K}}, \mathcal{V}^K, \mathcal{O}^K, \phi^K \rangle.$$

Vrijede uvjeti modela iz definicije 8, uz dodatne modifikacije:

1. $\mathcal{D}^K$ je neprazan skup opravdavajućih oznaka.

2. - 3. $\mathcal{A}^K$ je skup prihvaćenih, a $\mathcal{E}^K$ znanjotvornih opravdanja te vrijedi:[111]

[111] Članovi domene oznake su jezika, pa tako i u $\mathcal{A}$, i u $\mathcal{E}$.

- $Con \subseteq (\mathcal{A}^K \cap \mathcal{E}^K)$, uz uvjet da:
  - $t \in \mathcal{A}^K$ akko $t{:}_A F \in \Gamma_\omega^{max}$ za neku formulu F
  - $t \in \mathcal{E}^K$ akko $t{:}_E F \in \Gamma_\omega^{max}$ za neku formulu F.

4. $\mathcal{T}_0^K$ jest tumačenje iskaznih slova koje svakom iskaznom slovu $S \in Prop$ pridružuje istinitosnu vrijednost:
   - $\mathcal{T}_0^K(F) = 1$ akko je F iskazno slovo i $F \in \Gamma_\omega^{max}$.
5. $\mathcal{T}^K$ jest tumačenje konstanti pod uvjetom:
   - $\mathcal{T}^K(c) = c$ za svaku $c \in Con$.
6. $\mathcal{V}$ je vrednovanje koje svakoj varijabli pridružuje neki element domene:
   - $\mathcal{V}^K{:}Var \longrightarrow \mathcal{D}^K$
7. $\mathcal{O}^K$ jest denotativna funkcija iz skupa opravdavajućih oznaka u domenu, kao funkcija identiteta jer opravdavajuće oznake označavaju same sebe
8. ϕ^K jest evidencijska funkcija koja opravdavajućim oznakama pridružuje skupove formula pod sljedećim uvjetima:
   (a) $\phi^K{:}\mathcal{D}^{\mathcal{K}} \longrightarrow 2^{Fm}$
   (b) $F \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ akko $t{:}F \in \Gamma_\omega^{max}$.

U kanonskom modelu u domeni nam se nalaze opravdavajuće oznake. Gradnja maksimalnoga suvisloga skupa ovisi o pravilima sustava, a ako je maksimalan suvisao skup izgrađen na temelju pravila, onda se ona daju i izvesti. Shodno tomu, uvjeti zatvorenosti iz modela $*$ logike $\mathbf{EVL}^-$ daju se nadomjestiti gornjim uvjetom 8/b.

Pokažimo na primjeru uvjeta zatvorenosti za aplikaciju ili primjenu: ako je $(F \rightarrow G) \in \phi^K(\mathcal{O}^{\mathcal{K}}(t))$ i ako vrijedi $F \in \phi^K(\mathcal{O}^{\mathcal{K}}(s))$, onda $G \in \phi^K(\mathcal{O}^{\mathcal{K}}(s \cdot t))$. Neka je $(F \rightarrow G) \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ i neka vrijedi $F \in \phi^K(\mathcal{O}^K(s))$. Slijedi $t{:}F \rightarrow G \in \Gamma_\omega^{max}$ i $s{:}F \in \Gamma_\omega^{max}$. Dakle, $(t \cdot s){:}G \in \Gamma_\omega^{max}$ (Ax1). Stoga, $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t \cdot s))$.

Pokažimo izvođenje iz gornjega uvjeta i na specifičnom uvjetu vezanom uz racionalnost činitelja za prihvaćena opravdanja: ako $t \in \mathcal{A}^{\mathcal{K}}$, onda postoji s takav da $s \in \mathcal{A}^{\mathcal{K}}$ i $t{:}_E F \in \phi^K(\mathcal{O}^{\mathcal{K}}(s))$, za neku formulu F. Pretpostavimo $t \in \mathcal{A}^K$. Slijedi da je $t{:}_A F \in \Gamma_\omega^{max}$ po pravilima gradnje skupa $\mathcal{A}^K$. Iz Ax11 $(t{:}_A F \rightarrow \exists y\, y{:}_A t{:}_E F)$ slijedi $\exists y\, y{:}_A t{:}_E F$. Stoga je $\exists y\, y{:}_A t{:}_E F \in \Gamma_\omega^{max}$.

Lema 5 (Istinitosna lema)**.** Zadovoljivost u kanonskom modelu: za svaki iskaz F vrijedi da ako je formula član maksimalnoga suvisloga skupa Γ_ω^{max}, onda je istinita u kanonskom modelu za Γ_ω^{max}:

$$\vDash_{*^K,\mathcal{V}} F \text{ akko } F \in \Gamma_\omega^{max}.$$

Dokaz. Neka je Γ_ω^{max} zasićen skup. Tvrdimo da je zadovoljiv kanonskim modelom $*^K$. Slijedi dokaz istinitosne leme matematičkom indukcijom prema duljini iskaza. Izvodimo dokaz za svaki pojedini oblik iskaza. Induktivna je hipoteza da istinitosna lema vrijedi za sve formule stupnja manjega od k u dokazu za formule duljine k.

Neka je F iskazno slovo. Po definiciji 21 (str. 108) za iskazno slovo i pravilu konstrukcije modela slijedi da ako je $F \in \Gamma_\omega^{max}$, onda $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} F$. U drugom smjeru pretpostavimo da $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} F$ te po definiciji tumačenja iz definicije 21 slijedi $F \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $t{:}G$. Pretpostavimo da je $t{:}G \in \Gamma_\omega^{max}$. Po definiciji 21 slijedi da je $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$, a po definiciji 9 (str. 80) uvjeta istinitosti slijedi $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} t{:}G$. U drugom smjeru pretpostavimo da $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} t{:}G$ pa po definiciji 9 slijedi $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ te iz toga po definiciji 21 slijedi $t{:}G \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $t{:}_A G$. Pretpostavimo da je $t{:}_A G \in \Gamma_\omega^{max}$. Po definiciji 21 slijedi da je $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ i $t \in \mathcal{A}^K$, a po definiciji 9 uvjeta istinitosti slijedi $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} t{:}_A G$. Za drugi smjer pretpostavimo da je $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} t{:}_A G$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ i $t \in \mathcal{A}$, što po definiciji 21 daje $t{:}_A G \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $t{:}_E G$. Pretpostavimo da je $t{:}_E G \in \Gamma_\omega^{max}$. Po definiciji 21 slijedi da je $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ i $t \in \mathcal{E}^K$, a po definiciji 9 uvjeta istinitosti slijedi $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} t{:}_E G$. U drugom smjeru pretpostavimo da je $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} t{:}_E G$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $G \in \phi^K(\mathcal{O}^K(t))$ i $t \in \mathcal{E}$, što po definiciji 21 daje $t{:}_E G \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $\neg G$. Po lemi 1 u Γ_ω^{max} ili je formula ili njezina negacija. Pretpostavimo $\neg G \in \Gamma_\omega^{max}$, onda slijedi $G \notin \Gamma^{max}$ po svojstvu maksimalnoga suvisloga skupa. G je manje duljine od $\neg G$, pa vrijedi induktivna hipoteza te stoga $\nvDash_{*^K,\mathcal{V}} G$ te po definiciji 9 istinitosti slijedi $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} \neg G$. U drugom smjeru pretpostavimo da $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} \neg G$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\nvDash_{*^K,\mathcal{V}} G$. Po induktivnoj hipotezi $G \notin \Gamma_\omega^{max}$ te stoga po lemi 1 (str. 104) $\neg G \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $G \to H$. Pretpostavimo da je $G \to H \in \Gamma_\omega^{max}$. Slijedi $G \notin \Gamma_\omega^{max}$ ili $H \in \Gamma_\omega^{max}$ po lemi 1. Vrijedi induktivna hipoteza te slijedi $\nvDash_{*^K,\mathcal{V}} G$ ili

$\vDash_{*K,\mathcal{V}} H$. Slijedi $\vDash^K G \to H$ po uvjetima istinitosti definicije 9. U drugom smjeru pretpostavimo $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G \to H$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\nvDash_{*K,\mathcal{V}} G$ ili $\vDash_{*K,\mathcal{V}} H$, što po induktivnoj hipotezi daje $G \notin \Gamma^{max}$ ili $H \in \Gamma^{max}$ te po lemi 1 (str. 104) slijedi $G \to H \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $G \vee H$. Pretpostavimo da je $G \vee H \in \Gamma_\omega^{max}$. Po lemi 1 slijedi $F \in \Gamma_\omega^{max}$ ili $G \in \Gamma_\omega^{max}$. Po induktivnoj hipotezi slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G$ ili $\vDash_{*K,\mathcal{V}} H$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G \vee H$. Za drugi smjer pretpostavimo $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G \vee H$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G$ ili $\vDash_{*K,\mathcal{V}} H$. Po induktivnoj hipotezi i lemi 1 slijedi $G \vee H \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $G \wedge H$. Pretpostavimo da je $G \wedge H \in \Gamma_\omega^{max}$. Po lemi 1 slijedi $F \in \Gamma_\omega^{max}$ i $G \in \Gamma_\omega^{max}$. Po induktivnoj hipotezi slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} F$ i $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G$ te po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G \wedge H$. U drugom smjeru pretpostavimo $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G \wedge H$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G$ i $\vDash_{*K,\mathcal{V}} H$, a potom po induktivnoj hipotezi i lemi 1 dobivamo $G \wedge H \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $\forall x G$ i neka $\forall x G \in \Gamma_\omega^{max}$. Slijedi $G(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ za svaki s po lemi 4. Kako je $G(s/t)$ manje duljine od $\forall x G$, vrijedi induktivna hipoteza i stoga $\vDash_{*K,\mathcal{V}} G(s/x)$ prema induktivnoj hipotezi za svaku opravdavauću oznaku s (po definiciji kanonskoga modela svaki predmet iz domene zadovoljava formulu G) i po definiciji 9 istinitosnih uvjeta za kvantifikatore slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} \forall x G$. Za drugi smjer pretpostavimo $\vDash_{*K,\mathcal{V}} \forall x G$. Po uvjetima istinitosti definicije 9 i induktivnoj hipotezi slijedi da za svaki $s, G(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ te po lemi 4 dobivamo $\forall x G \in \Gamma_\omega^{max}$.

Neka je F formula oblika $\exists x G$ i neka $\exists x G \in \Gamma_\omega^{max}$. Tada po lemi 4 slijedi da je za svaki $s, G(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ za neku opravdavajuću oznaku te po definiciji 9 istinitosnih uvjeta za kvantifikatore slijedi $\vDash_{*K,\mathcal{V}} \exists x G$. U drugom smjeru pretpostavimo $\vDash_{*K,\mathcal{V}} \exists x G$. Po definiciji 9 uvjeta istinitosti i induktivnoj hipotezi slijedi da za neki $s, G(s/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ te po lemi 4 slijedi $\exists x G \in \Gamma_\omega^{max}$.

□

Stavak 13 (Zadovoljivost Γ^P)**.** Skup Γ^P samo s parnim pokazateljima na oznakama zadovoljiv je ako je i skup Γ zadovoljiv.

Dokaz. Ako je skup Γ zadovoljiv tumačenjem $\mathcal{T}$, onda je to i skup Γ^P tumačenjem $\mathcal{T}'$, pri čemu je $\mathcal{T}(s_n) = \mathcal{T}'(s_{2n})$ te vrijedi i obratno [99, str. 42]. □

Lema 6 (Suvislost i zadovoljivost)**.** Ako je skup iskaza Γ suvisao, onda je i zadovoljiv.

Dokaz. Pretpostavimo da je Γ suvisao, slijedi da je suvisao i Γ^P po stavku 13. Po lemi 3 Γ^P podskup je barem jednoga suvisloga skupa Γ_ω koji je ω-potpun. Po Lindenbaumovoj lemi (lema 2) Γ_ω podskup je barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa Γ^{max}.

Po stavku 12 $\Gamma^{max} = \Gamma_\omega^{max}$, odnosno ω-potpun je. $\Gamma^P \subseteq \Gamma_\omega^{max}$ slijedi po definiciji nadskupa. Prema lemi 5 slijedi da je Γ_ω^{max} zadovoljiv kanonskim modelom, stoga je i Γ^P zadovoljiv po stavku 13. Dakle, ako je Γ suvisao, onda je Γ i zadovoljiv. $\square$

Poučak 2 (Potpunost logike $\mathbf{EVL}^-$)**.** Ako $\Gamma \vDash F$, onda $\Gamma \vdash F$.

Dokaz. Ako je skup iskaza Δ suvisao, Δ je zadovoljiv, odnosno kontrapozicijom: ako je Δ nezadovoljiv, onda je i nesuvisao [99, str. 43].

Pretpostavimo da $\Gamma \nvdash F$. Iz toga slijedi da je $\Gamma \cup \{\neg F\}$ suvisao. Po lemi 6 $\Gamma \cup \{\neg F\}$ zadovoljiv je, odnosno $\Gamma \nvDash F$.

Po stavku 1 i 8 slijedi da ako $\Gamma \nvdash F$, onda $\Gamma \nvDash F$ te kontrapozicijom dobivamo da ako $\Gamma \vDash F$, onda $\Gamma \vdash F$, što je dokaz poučka 2. $\square$

5.4 Logika EVL

5.4.1 Osnovne postavke logike EVL

Logika **EVL** nadograđuje se na logiku $\mathbf{EVL}^-$ tako da vrijedi kao adekvatan generaliziran opis svih evidencijalnih jezika. Skup opravdanja dijeli se na skup direktnih i indirektnih opravdanja, s obzirom na to da se u svim višečlanim evidencijalnim sustavima opravdanja klasificiraju ili kao direktna (senzorna) ili kao indirektna (inferencijalna i iz druge ruke). Klasifikacija opravdanja označava se predikatima D i I, pri čemu Dt znači da je t direktno opravdanje, a It da je t indirektno opravdanje, pri čemu nijedno opravdanje ne može biti oboje istodobno, što će biti definirano aksiomima i uvjetima modela.

Činjenica da su epistemični i doksastični aksiomi teoremi ovoga sustava donosi nam mogućnost da operatore znanja i vjerovanja kombiniramo s predikatima direktnosti i indirektnosti. Dokazat ćemo kako je ova logika također pouzdana i potpuna.

5.4.2 Sintaksa logike EVL

Definicija 22 (Rječnik logike **EVL**)**.** Rječnik logike **EVL** definira se kao u definiciji 1, uz dodatak predikatskih slova D i I.

Definicija 23 (Formula u logici **EVL**)**.** Formula u logici **EVL** definira se kao u definiciji 3 (str. 70) za logiku $\mathbf{EVL}^-$, uz dodatak da formule mogu biti i oblika Dt i It, pri čemu su D i I predikati, a t opravdanja:

$$F ::= S \mid F_1 \to F_2 \mid F_1 \wedge F_2 \mid F_1 \vee F_2 \mid \neg F \mid t{:}F \mid t{:}_A F \mid t{:}_E F \mid \exists x F \mid \forall x F \mid Dt \mid It.$$

Definicija 24 (Sustav **EVL**)**.** Osnovne aksiomatske sheme **EVL** sastoje se od aksiomatskih shema logike $\mathbf{EVL}^-$ (Ax0 – Ax13, v. definiciju 4 na str. 71) i dodanih aksioma za direktna i indirektna opravdanja:

Ax14 $Dt \leftrightarrow \neg It$

Ax15 $I(s \cdot t)$

Ax16 $(Dt \wedge t{:}F) \rightarrow (t{:}_A F \wedge t{:}_E F)$.

Sustav **EVL** sustav je prirodne dedukcije s dodatnim aksiomima i definicijama. Strukturna pravila (opetovanje i monotonost) i pravila zaključivanja u sustavu **EVL** ista su kao u definiciji 4 (str. 71) uz modifikaciju (Ax_n):

(Ax$_n$) aksiom: u svakom retku dokaza možemo pisati oprimjerenje aksiomatskih shema iz definicija 4 (str. 71) i 24 (str. 113).

Ax14 govori da nijedno opravdanje nije istodobno direktno i indirektno, odnosno opravdanja su samo direktna ili indirektna, što odgovara situaciji u evidencijalnim jezicima. Premda postoje opravdanja poput inferencijalnih senzornih opravdanja, ona su i dalje indirektna, ali na temelju direktne dokazne građe.

Ax15 govori o indirektnosti primjene, primjerice o zaključivanju tipa *modus ponens*, kao u tibetskim primjerima na str. 61. Rezultat svakoga takvoga zaključivanja uvijek je indirektno jer su inferencijalni evidencijali indirektna vrsta evidencijala u svim evidencijalnim jezicima.

Pomoću Ax16 ističemo kako, shodno definiciji 14 operatora znanja (str. 86), direktna opravdanja vode do znanja, odnosno ona su istodobno i prihvaćena i znanjotvorna, iz čega slijedi i $(Dt \wedge t{:}F) \rightarrow KF$. Direktna opravdanja uobičajeno su senzorna i smatraju se vrhom hijerarhije i na temelju njih vrednuju se ostala opravdanja. To ne znači da su nepogrešiva (primjerice, govornik može vidjeti halucinaciju), no razmatramo ujedno idealni, ali i uobičajeni slučaj standardne jezične prakse u evidencijalnim jezicima (v. poglavlje 4.5).

5.4.3 Semantika logike EVL

Definicija 25 (Model logike **EVL**). Model logike **EVL** jest uređena osmorka $* = \langle \mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{O}, \phi \rangle$, pri čemu vrijede opisi iz definicije 8 (str. 76) modela logike $\mathbf{EVL}^-$, uz dodane uvjete i preinake:

- dodatni uvjeti funkcije $\mathcal{T}$:
  - $\mathcal{T}$ također predikatima pridružuje skupove opravdanja iz domene i zadovoljava sljedeće uvjete:
    1. $\mathcal{T}(I) \subseteq \mathcal{D}$
    2. $\mathcal{T}(D) \cup \mathcal{T}(I) = \mathcal{D}$
    3. $\mathcal{T}(D) \cap \mathcal{T}(I) = \emptyset$
    4. $\mathcal{T}(D) = \{\mathcal{O}(c){:}c \in Con\}$.
  - uvjet zatvorenosti:
    - ako je nad opravdanjima izvršena primjena, ta je primjena indirektna: ako $s \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{D}$, onda $I(s \cdot t)$.

Funkcija $\mathcal{T}$ proširena je dodatnom ulogom pridruživanja skupa opravdanja predikatu D za direktna opravdanja te I za indirektna opravdanja. Ako je opravdanje direktno, ujedno je i prihvaćeno i znanjotvorno, no kod indirektnih to nije uvijek slučaj.

U slučaju da imamo sustav u kojem provjerivač dokaza i faktivnost vežemo samo uz direktna opravdanja, takav bi sustav bio sličan logici dokaza. Međutim, u evidencijalnim jezicima želimo imati mogućnost verificirati svako opravdanje. Kao što smo u $\mathbf{EVL}^-$ tvrdili kako znanjotvorna opravdanja vode do faktivnosti (usp. definicija 4 na str. 71), tako i ovdje slijedi isto jer su direktna opravdanja istodobno i prihvaćena i znanjotvorna, a već sama pripadnost skupu znanjotvornih opravdanja vodi do faktivnosti.

Definicija 26 (Uvjeti istinitosti u logici $\mathbf{EVL}$)**.** Uključuju se uvjeti istinitosti logike $\mathbf{EVL}^-$ iz definicije 9 (str. 80), uz dodatak:

- $\vDash_{*,\mathcal{V}} Dt$ akko $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D)$
- $\vDash_{*,\mathcal{V}} It$ akko $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(I)$.

Stavak 14 (Prihvaćenost i znanjotvornost direktnih opravdanja)**.** Za direktna opravdanja vrijedi da su prihvaćena i znanjotvorna:

1. Ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D)$, onda $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_A F$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_E F$.
2. Ako $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D)$, onda $\vDash_{*,\mathcal{V}} F$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$. Po definiciji 25 direktna opravdanja jednaka su podskupu predmeta označenih konstantama. Po tumačenju predmeta označenih konstantama iz definicije 8 (str. 76) te po stavku 6 (str. 82) i uvjetima istinitosti definicije 9 (str. 80) slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_A F$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_E F$.

Ako pretpostavljamo $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(\mathcal{D})$ te preko primjera 1 ovoga stavka i uvjeta istinitosti znanjotvornih opravdanja definicije 9 (str. 80) dobivamo $\vDash_{*,\mathcal{V}} F$. □

Svaki predmet označen konstantom predstavlja direktno opravdanje, odnosno konstante stvaraju direktna opravdanja za aksiome. Svi aksiomi opravdani su konstantama, no različiti drugi iskazi mogu biti opravdani nekim drugim konstantama, odnosno imat će direktno opravdanje.

Prihvaćena opravdanja mogu biti direktna i indirektna, činitelj prihvaća sva direktna opravdanja, ali ne i sva indirektna opravdanja, primjerice umanjuje se vjerodostojnost opravdanja iz druge, treće itd. ruke. Moguće je zamisliti i da činitelj ne prihvaća neka direktna opravdanja, primjerice osjećaj fantomske boli ili zna da halucinira, no u praksi se ograničavamo na idealiziran slučaj u jeziku, gdje se direktna opravdanja odnose na pouzdane senzorne informacije. Klasični su slučajevi da su direktna opravdanja znanjotvorna i prihvaćena te da su indirektna opravdanja samo prihvaćena (pri čemu činitelj može prihvaćati mnogo opravdanja koja ne vode do znanja). No, moguće je da direktna opravdanja ne budu prihvaćena, a da jesu znanjotvorna, primjerice činitelj ne prihvaća neku istinitu tvrdnju, ili pak da indirektna opravdanja budu prihvaćena i znanjotvorna, primjerice ako osobu smatramo dovoljnim autoritetom na temelju opravdanja iz druge ruke ili ako je indirektno opravdanje za neku tvrdnju dobiveno pouzdanim procesom zaključivanja (podsjetimo se, inferencijalna opravdanja smatraju se indirektnima, što u jezicima i hijerarhizaciji evidencijalne snage, što u našoj formalizaciji).

U našem modelu u presjeku skupova prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja postoji još podskupova toga presjeka osim predmeta označenih konstantama. Primjerice, ovdje se ubrajaju direktna opravdanja, koja su i prihvaćena i znanjotvorna, što se odnosi ne samo na opravdanja aksioma nego i općenito na senzorne informacije koje se smatraju pouzdanima. Ovdje pripadaju i opravdanja koja nisu direktna opravdanja toga činitelja, primjerice tuđa direktna opravdanja. Prihvaćena i znanjotvorna jesu i indirektna opravdanja koja ujedno proizvode znanje (primjerice opravdanje iz druge ruke smatramo pouzdanim), a to je podskup indirektnih opravdanja. Taj je podskup član presjeka skupa prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja (v. definiciju 6 na str. 82, sam presjek primjereno je zatvoren).

I direktna i indirektna opravdanja mogu biti atomarna. Direktno atomarno opravdanje može biti "vidim da F" ($Dt, t{:}F$), dok indirektno atomarno opravdanje može biti primjerice reportativno $It, t{:}F$ za "netko mi je rekao da F"). I direktna i indirektna opravdanja mogu biti rezultat operacija primjene i zbroja. Direktna neatomarna opravdanja mogu biti provjerivač dokaza (*proof checker*) ili introspekcija, primjerice "znam da vidim da F" ($t{:}F, DDt$) u smislu i direktnoga intelektualnoga zora. Rečeno je kako u skupovima indirektnih opravdanja ne vrijedi faktivnost jer ne možemo egzaktno verificirati informaciju iz druge ruke, odnosno ako imam indirektno opravdanje, primjerice "netko mi je rekao da F", ne slijedi faktivno da je F doista istinito.

Direktna opravdanja tretiraju se tehnički kao indirektna ako nisu govornikova, primjerice "sutra ću vidjeti pomorsku bitku" ne znači da će se to dogoditi i da će to doista biti slučaj, dok viđenje druge osobe zapravo ulazi u domenu reportativnih evidencijala.

Stavak 15 (Zaključivanje u $\mathbf{EVL}$). Vrijede posljedice zaključivanja logike $\mathbf{EVL}^-$ iz stavka 7, uz dodatak da je rezultat zaključivanja uvijek indirektno opravdan.

Dokaz. U slučaju da je jedna od premisa član samo skupa prihvaćenih opravdanja, opravdanje za konkluziju bit će jako koliko i najslabiji član premisa, a to je uvijek indirektno opravdanje. No, čak i u slučaju da u zaključivanju imamo samo direktna opravdanja, konkluzija je uvijek opravdana indirektno (inferencijalnim evidencijalom). Slijedi da činitelj prihvaća posljedice svojih vjerovanja, a te su posljedice prihvaćene i istinite. Odnosno u presjeku skupa prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja postoje indirektna opravdanja, što smo bili i pretpostavili opisujući članove presjeka skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{T}(I) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{E}) \neq \emptyset.$$

Po stavku 7 slijedi da ako $\mathcal{O}(s) \in \mathcal{A}$ ili $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{A}$, onda $\mathcal{O}(s \cdot t) \in \mathcal{A}$ te su barem neka prihvaćena opravdanja indirektna.

Ako po stavku 7 pretpostavimo da su i $\mathcal{O}(s)$ i $\mathcal{O}(t)$ elementi $\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, takva je i primjena, $\mathcal{O}(s \cdot t) \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{E})$, stoga su barem neka indirektna opravdanja i prihvaćena i znanjotvorna. $\square$

U izlaganju aksioma aplikacije naveli smo kako je rezultat primjene uvijek indirektno opravdanje, odnosno $I(s \cdot t)$, zato što se zaključci u evidencijalnim jezicima, pa tako i u tibetskom, smatraju indirektno opravdanima. Odnosno, uvijek se rabi indirektno inferencijalno opravdanje za rezultat logičkoga zaključivanja. U slučaju primjene ona je sama u skupu znanjotvornih opravdanja ako su oba konstituenta članovi toga skupa, a isto vrijedi i za skup opravdanja koja činitelj prihvaća. Opravdanja su predikatima podijeljena na direktna i indirektna opravdanja, koja su jasno odjelita, odnosno njihov je presjek prazan skup. Presjek skupa prihvaćenih i znanjotvornih opravdanja nije prazan, a njegov su podskup direktna opravdanja te dio indirektnih opravdanja.

5.4.4 Napomena

Pomoću Ax4, Ax5 i Ax11 formaliziramo lingvističku činjenicu da govornici nemaju direktno opravdanje za dvije međusobno kontradiktorne tvrdnje koje govornik prihvaća, činjenicu koja ne vrijedi samo u tibetskom nego i u većini evidencijalnih jezika. Međutim, moguće je da postoji direktno opravdanje za neku tvrdnju i indirektno opravdanje za njoj kontradiktornu tvrdnju, no u tom slučaju u hijerarhizaciji opravdanja indirektno opravdanje irelevantno je u odnosu na direktno opravdanje, kako je slučaj u tibetskom i u većini evidencijalnih jezika, i zapravo se ne radi o pravoj kontradikciji. Takav ćemo sustav uvesti u sljedećoj logici. Sva je opravdanja moguće negirati, čak i direktna, što smo vidjeli u tibetskom primjeru na stranici 61 gdje govornik negira evidencijal i donosi direktno opravdanje. Međutim, jezična je intuicija da u toj situaciji pragmatično slaba opravdanja prestaju biti relevantnim opravdanjima uopće, odnosno govornik ih više ne prihvaća.

Naime, iz lingvističkoga aspekta, opravdanje koje je opravdanje za F, a ujedno i opravdanje za $\neg F$ pragmatički se razlikuje te opravdanja kao objekti – odnosno u kanonskom modelu opravdavajuće oznake kao objekti – imaju različite pragmatičke konotacije te nisu u izravnoj kontradikciji, što se čini da je često slučaj u evidencijalnim jezicima, recimo u primjeru iz kečue (str. 46), gdje se nikad ne negira izvor informacije nego doživljaj o toj informaciji. U tom primjeru navodi se kako je čovjek lopov, potom drugi govornik navodi indirektnim opravdanjem da to nije istina, a prvi govornik mijenja svoje opravdanje i više ga ne prihvaća. Dakle, kontradikcija je moguća samo ako su oba opravdanja prihvaćena. U ovom sustavu još ne razlikujemo činjenicu da se kontradikcija poništava, odnosno moguće su kombinacije oblika $Dt \wedge t{:}F$ i $It \wedge t{:}\neg F$, što je i gramatički slučaj, ali ne i pragmatički.

Nameću se i neki aksiomi koje ipak ne uvodimo, a mogli bi se činiti prikladnima za sustav. Primjerice, može se dogoditi da činitelj ne prihvaća neku istinitu tvrdnju, a da se ipak proizvodi znanje, no takve su situacije u jezicima neuobičajene i negramatični su slučajevi da netko ne prihvaća znanjotvorna opravdanja.

Klasični teorem koji se lako izvodi jest činjenica da direktno opravdanje vodi – u idealiziranoj i svakodnevnoj jezičnoj situaciji – do znanja, odnosno do istine:

- $Dt \wedge t{:}F \to KF$
- $Dt \wedge t{:}F \to F$

Oba je teorema lako izvesti. Pretpostavimo $Dt \wedge t{:}F$. Po Ax11 dobivamo $t{:}_A F \wedge t{:}_E F$ i po definiciji 14 (str. 86) KF. Odnosno, po Ax10 dobivamo F.

Međutim, neće vrijediti da $F \to Dt$ jer i indirektno opravdanje može voditi do istine, samo ne uvijek. Primjerice, može se raditi o vrlo pouzdanom opravdanju iz druge ruke ili valjanom zaključivanju. Međutim, zbog brojnih indirektnih opravdanja koja često u jezicima ne vode do istine – kakva su često reportativna opravdanja ili općenito opravdanja iz druge ruke – ne možemo generalizirati takve slučajeve.

5.4.5 Pouzdanost sustava EVL

Pouzdanost analogno slijedi kao za logiku $\mathbf{EVL}^-$ u poglavlju 5.3.7. Dokazujemo valjanost dodatnih aksiomatskih shema Ax14, Ax15 i Ax16.

Dokažimo valjanost Ax14: $Dt \leftrightarrow \neg It$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} Dt$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 26 (str. 115) slijedi da $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D))$. Ako $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D))$, onda po definiciji 25 (str. 114) $\mathcal{T}(D) \cap \mathcal{T}(I) = \emptyset$, stoga $\mathcal{O}(t) \notin \mathcal{T}(I)$ te $\nvDash_{*,\mathcal{V}} It$. Stoga po definiciji negacije iz 9 (str. 80) slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} \neg It$.

Dokažimo valjanost Ax15: $I(s \cdot t)$. Po definiciji 25 (str. 114) slijedi da za svako opravdanje s i t njihova je primjena indirektna, što je ovdje slučaj, te po definiciji 26 (str. 115) slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} I(s \cdot t)$.

Dokažimo valjanost Ax16: $(Dt \wedge t{:}F) \to (t{:}_A F \wedge t{:}_E F)$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} Dt \wedge t{:}F$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 26 (str. 115) slijedi da $F \in \phi(\mathcal{O}(t))$ i $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D)$, iz čega slijedi po stavku 14 (str. 115) $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_A F$ i $\vDash_{*,\mathcal{V}} t{:}_E F$.

Time slijedi da je je istinitost iskaza F očuvana u svakom retku dokaza u logici $\mathbf{EVL}$, odnosno: ako $\Gamma \vdash_* F$, onda $\Gamma \models_* F$ te je sustav $\mathbf{EVL}$ pouzdan.

5.4.6 Potpunost sustava EVL

Potpunost analogno slijedi kao za logiku $\mathbf{EVL}^-$ u poglavlju 5.3.8. Gradimo kanonski model uz proširene dodatne uvjete vezane uz predikate direktnosti i indirektnosti (definicija 24, str. 113).

Definicija 27 (Kanonski model $\mathbf{EVL}$)**.** Kanonski model logike $\mathbf{EVL}$ jest uređena osmorka:

$$*^{\mathrm{K}} = \langle \mathcal{D}^K, \mathcal{A}^K, \mathcal{E}^K, \mathcal{T}_0^K, \mathcal{T}^K, \mathcal{V}^K, \mathcal{O}^K, \phi^K \rangle.$$

Za razliku od kanonskoga modela logike $\mathbf{EVL}^-$, $\mathcal{D}^K$ se dijeli na skup direktnih i skup indirektnih opravdanja. Vrijede svi uvjeti iz definicije 21 (str. 108) kanonskoga modela logike $\mathbf{EVL}^-$ te modela iz definicije 25 (str. 114) uz dodatne uvjete za funkciju $\mathcal{T}^K$:

- $Dt \in \Gamma_\omega^{max}$ akko $\mathcal{O}^K(t) \in \mathcal{T}^K(D)$.
- $It \in \Gamma_\omega^{max}$ akko $\mathcal{O}^K(t) \in \mathcal{T}^K(I)$.

Primjenjuje se definicija 20 (str. 108) zasićenoga skupa.

Lema 7 (Istinitosna lema)**.** Zadovoljivost u kanonskom modelu: za svaki iskaz F vrijedi da ako je formula član maksimalnoga suvisloga skupa Γ_ω^{max}, onda je istinita u kanonskom modelu za Γ_ω^{max}:

$$\models_{*^K,\mathcal{V}} F \text{ akko } F \in \Gamma_\omega^{max}.$$

Dokaz. Dokaz je indukcijom po duljini iskaza analogan dokazu leme 5 (str. 109) logike $\mathbf{EVL}^-$. Izvodimo dokaz za iskaze oblika Dt i It, dok su ostali oblici dokazani u lemi 5.

Neka je F formula oblika Dt. Pretpostavimo da je $Dt \in \Gamma_\omega^{max}$. Po definiciji 27 kanonskoga modela (str. 120) slijedi da je $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D)$, a po definiciji 26 (str. 115) uvjeta istinitosti slijedi $\models_{*^K,\mathcal{V}}\ Dt$. U drugom smjeru pretpostavimo da $\models_{*^K,\mathcal{V}}\ Dt$. Po definiciji 26 (str. 115) slijedi $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(D)$ pa po definiciji 27 (str. 120) slijedi $Dt \in \Gamma_\omega^{max}$

Neka je F formula oblika It. Pretpostavimo da je It in Γ_ω^{max}. Po definiciji 27 (str. 120) kanonskoga modela slijedi da je $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(I)$, a po definiciji 26 (str. 115) uvjeta istinitosti slijedi $\models^K\ It$. U drugom smjeru pretpostavimo da $\models_{*^K,\mathcal{V}}\ It$. Po definiciji 26 (str. 115) slijedi $\mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}(I)$ pa po definiciji 27 (str. 120) slijedi $It \in \Gamma_\omega^{max}$.

□

Po lemi 5 (str. 109), lemi 7 te po poučku o potpunosti 2 (str. 112), analogno kao i u logici $\mathbf{EVL}^-$, slijedi da ako $\Gamma \models F$, onda $\Gamma \vdash F$, čime je logika $\mathbf{EVL}$ potpuna.

5.5 Logika EVL$^+$

5.5.1 Osnovne postavke logike EVL$^+$

Logika $\mathbf{EVL}^+$ nadograđuje se na logiku $\mathbf{EVL}$ tako da vrijedi kao opis specifičnoga evidencijalnoga jezika – standardnoga tibetskoga. Uvodi se novi predikat H koji označava hijerarhizaciju opravdanja. U tibetskom je to dvomjesni predikat tipa Hts, što znači da je opravdanje t hijerarhijski više i važnije od opravdanja s. Takav se sustav može konstruirati za po volji odabran evidencijalni jezik na temelju diskusije o hijerarhiji opravdanja (poglavlje 4.5).

Primjerice, označimo našu evidencijalnu hijerarhiju opravdavajućim varijablama:

- s: vizualna informacija
- t: informacija iz ostalih osjetila
- u: zaključivanje iz osjetila
- v: zaključivanje (iz dokaza)
- z: reportativna informacija.

Općenit bi sustav primjenjiv na evidencijalne jezike općenito mogao imati predikat tipa Hxy, pri čemu x i y stoje za neki od navedenih evidencijala. Hijerarhijom $s > t, t > u, u > v, v > z$ i prijelaznošću mogli bismo označiti evidencijalnu hijerarhiju. Takvu bismo hijerarhiju mogli proširiti sa svim vrstama evidencijala, pri čemu bismo od dvaju skupova – direktnih i indirektnih – opravdanja mogli dobiti proizvoljno mnogo, ovisno o stanju stvari u specifičnim evidencijalnim sustavima (usp. poglavlje 4.2).

5.5.2 Sintaksa logike EVL$^+$

Definicija 28 (Rječnik logike $\mathbf{EVL}^+$)**.** Rječnik logike $\mathbf{EVL}^+$ definira se kao u definiciji 22, uz dodatak predikatskoga slova H.

Definicija 29 (Formula u logici $\mathbf{EVL}^+$)**.** Formula u logici $\mathbf{EVL}^+$ definira se kao u definiciji 23 (str. 113) za logiku $\mathbf{EVL}$, uz dodatak da je formula i Hts, pri čemu su t i s opravdavajuće oznake, a H je dvomjesni predikat:

$$F ::= S \mid F_1 \to F_2 \mid F_1 \wedge F_2 \mid F_1 \vee F_2 \mid \neg F \mid t{:}F \mid t{:}_A F \mid t{:}_E F \mid \exists x F \mid \forall x F \mid Dt \mid It \mid Hts.$$

Dvomjesni predikat Hxy čitamo "x je hijerarhijski na višem mjestu od y", odnosno "x je relevantnije opravdanje od y" za neku formulu F.

Definicija 30 (Sustav $\mathbf{EVL}^+$)**.** Aksiomatskim shemama logike $\mathbf{EVL}$ (Ax0 – Ax16, v. definiciju 4 na str. 71) dodajemo aksiome za hijerarhiju opravdanja:

Ax17 hijerarhija opravdanja: $(Dt \wedge t{:}F \wedge Is \wedge s{:}F) \to Hts$

Ax18 hijerarhijske sastavnice: $Hts \to (Dt \wedge Is)$.

Sustav $\mathbf{EVL}^+$ sustav je prirodne dedukcije s dodatnim aksiomima i definicijama. Strukturna pravila (opetovanje i monotonost) i pravila zaključivanja u sustavu $\mathbf{EVL}^+$ ista su kao u definiciji 24 (str. 114) logike $\mathbf{EVL}$ uz modifikaciju (Ax_n):

(Ax$_n$) aksiom: u svakom retku dokaza možemo pisati oprimjerenje aksiomatskih shema iz definicija 4 (str. 71), 24 (str. 113) i 30 (str. 123).

Pomoću Ax17 i Ax18 uspostavljamo hijerarhiju opravdanja. Ako za neku formulu postoje dva opravdanja, pri čemu je jedno direktno, a drugo indirektno, onda je direktno opravdanje hijerarhijski više i shodno tomu važnije od indirektnoga opravdanja. Ako imamo hijerarhiju opravdanja, znamo da se radi o direktnom i indirektnom opravdanju.

5.5.3 Semantika logike EVL$^+$

Definicija 31 (Model logike $\mathbf{EVL}^+$)**.** Model logike $\mathbf{EVL}^+$ jest uređena osmorka $* = \langle \mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{T}_0, \mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{O}, \phi \rangle$, pri čemu vrijede opisi iz definicije 25 (str. 114) logike $\mathbf{EVL}$, uz dodane dodatne uvjete za funkciju ϕ, koja također hijerarhijskim predikatima pridružuje indirektna i direktna opravdanja iz domene:

- $\mathcal{T}(H) = \{\langle t, s\rangle \mid t \in \mathcal{T}(D), s \in \mathcal{T}(I)\}$ i postoji F takav da $F \in \phi(\mathcal{O}(t)$, $F \in \phi(\mathcal{O}(s))$.

Definicija 32 (Uvjeti istinitosti u logici **EVL**$^+$)**.** Uključuju se uvjeti istinitosti logike **EVL** iz definicije 26 (str. 115) logike **EVL**, uz dodatak:

- $\vDash_{*,\mathcal{V}} Hts$ akko $\langle t, s\rangle \in \mathcal{T}(H)$.

Odnosno, prvo je opravdanje pridruženo skupu vezanom uz predikat direktnosti, a drugo uz predikat indirektnosti, tj. prvo je opravdanje direktno i po definiciji hijerarhijski važnije, a drugo je indirektno i manje relevantno.

5.5.4 Napomena

Ovaj sustav ne dopušta hijerarhizaciju između fino raslojenih direktnih ili indirektnih opravdanja, no dopušta laku modifikaciju. Naime, tibetski posjeduje indirektni i direktni evidencijal, no u slučaju kad bismo htjeli bolje razlikovati različite vrste direktnosti (što se često razlikuje i u uporabi u različitim glagolskim vremenima), mogli bismo modificirati logiku **EVL** tako da predikati nisu samo predikati direktnosti i indirektnosti nego i specifičnih vrsta evidencijala. To vrijedi i za bilo koji drugi evidencijalni jezik: modifikacijom logike **EVL** i modifikacijom hijerarhijskoga predikata u logici **EVL**$^+$ možemo lako opisati hijerarhijske odnose u bilo kojem jeziku. Predikat je dvomjestan, a prijelaznošću određujemo hijerarhiju evidencijala, koliko ih god bilo u danom jeziku.

U slučaju da za tvrdnju imamo više evidencijala, odnosno različitih opravdanja, smatramo da su direktna hijerarhijski relevantnija, što je posljedica aksioma Ax17. Moguće je imati više opravdanja za istu tvrdnju, no na temelju aksioma znamo kako je direktno hijerarhijski važnije, odnosno već na temelju samo jednoga direktnoga opravdanja – proizvedenoga pouzdanim procesom – možemo doći do istine, a po definiciji i do znanja.

Na taj način u daljnjim analizama takvih rečenica mogli bismo se fokusirati samo na direktno opravdanje. Na temelju Ax9 iz logike **EVL** već osiguravamo da nam govornik ne prihvaća protuslovne tvrdnje, no protuslovlje je moguće – kao što je u prirodnom jeziku slučaj – između različitih govornika (ili čak unutar istoga), sve dok naš činitelj ne prihvaća protuslovnu tvrdnju, što smo formalno ograničili jer pretpostavljamo racionalnost činitelja. Moguće je zamisliti i situaciju u kojoj hijerarhijski vrednujemo opravdanja različitih govornika.

Mogu se dokazati i sljedeći stavci:

- $Hts \to \neg(Dt \wedge Ds)$
- $Hts \to \neg(It \wedge Is)$.

Pomoću Ax17 izvodimo $(Dt \wedge Is)$ iz Hts te isključenjem konjunkcije i pomoću Ax14 te uz de Morganov zakon dobivamo oba slučaja.

Odnosno, hijerarhizaciju ne možemo u ovom slabom obliku raditi među dvama direktnim opravdanjima jer njihova jačina možda ovisi o kontekstu, a moguće je da se, primjerice, radi o dvama vizualnim opravdanjima. Analogno nema hijerarhizacije među dvama indirektnim opravdanjima jer ne znamo koje su točno vrste. Kad bi se uveli dodatni predikati, raslojenost bi bila veća, a to je sljedeći korak primjene na svaki evidencijalni jezik posebno.

Posebnost ove logike jest što se evidencijalna hijerarhizacija može vrlo lako primijeniti na bilo koji drugi jezik uvođenjem višemjesnoga predikata. Spomenuli smo u poglavlju 4.5 kako postoje različite studije o evidencijalnim hijerarhijama za zasebne jezike te pokušaji generalizacije nad evidencijalnim jezicima. Na taj bi se način, primjerice, amazonski jezik tucano s hijerarhijom *vizualno – nevizualno – inferencijalno – reportativno – pretpostavljeno* mogao opisati peteromjesnim predikatom $Hvnirp$, pri čemu su v, n, i, r, p varijable za različite vrste opravdanja. Modifikacija bi bila potrebna i u logici **EVL**, tako da umjesto predikata D i I za direktnost i indirektnost, imamo dodatne predikate za različite vrste evidencijala, odnosno opravdanja. Primjerice Vt, Nt, It, Rt, Pt. Moguće bi bile i različite unutarnje hijerarhije, koje bi se mogle opisati uvođenjem dodatnoga predikata jačine, npr. $Jts \wedge Vt \wedge Ns$ označavalo bi da je prvo opravdanje vizualno, drugo nevizualno senzorno i da je prvo hijerarhijski jače od drugoga. Na isti bismo način mogli napraviti sve moguće kombinacije, primjerice u slučaju da za jednu tvrdnju imamo dva opravdanja, odnosno za neki $t{:}F \wedge s{:}F$:

- $(Vt \wedge Ns \wedge t{:}F \wedge s{:}F) \to Jts$ – vizualno opravdanje hijerarhijski je više od nevizualnoga senzornoga opravdanja
- $(Nt \wedge Is \wedge t{:}F \wedge s{:}F) \to Jts$ – nevizualno senzorno opravdanje hijerarhijski je više od inferencijalnoga opravdanja

- $(It \wedge Rs \wedge t{:}F \wedge s{:}F) \rightarrow Jts$ – inferencijalno opravdanje hijerarhijski je više od reportativoga opravdanja. [itd.]

Na sličan način, uz nevelike zahvate, logika **EVL**$^+$, uz adekvatne modifikacije **EVL** oko vrsta opravdanja, može opisivati bilo koji specifični evidencijalni jezik.

5.5.5 Pouzdanost sustava EVL$^+$

Pouzdanost analogno slijedi kao za logiku **EVL**$^-$ u poglavlju 5.3.7 prošireno dokazima aksiomatskih shema logike **EVL** iz poglavlja 5.4.5. Dokazujemo valjanost dodatnih aksiomatskih shema Ax17 i Ax18.

Dokažimo valjanost Ax17: $(Dt \wedge t{:}F \wedge Is \wedge s{:}F) \rightarrow Hts$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} Dt \wedge t{:}F \wedge Is \wedge s{:}F$. Prema definiciji 32, definiciji 31 modela i na temelju uvjeta istinitosti definicije 26 (str. 115) slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} Hts$.

Dokažimo valjanost Ax18: $Hts \rightarrow (Dt \wedge Is)$. Pretpostavimo $\vDash_{*,\mathcal{V}} Hts$. Po definiciji 32 uvjeta istinitosti, definiciji 31 modela te definiciji 26 (str. 115) slijedi $\vDash_{*,\mathcal{V}} Dt \wedge Is$.

Stoga slijedi da je i u logici **EVL**$^+$ istinitost iskaza F očuvana u svakom retku dokaza, odnosno: ako $\Gamma \vdash_* F$, onda $\Gamma \vDash_* F$ te je sustav **EVL**$^+$ pouzdan.

5.5.6 Potpunost sustava EVL$^+$

Potpunost analogno slijedi kao za logiku **EVL**$^-$ u poglavlju 5.3.8 i logiku **EVL** u poglavlju 5.4.6. Gradi se kanonski model uz proširene dodatne uvjete vezane uz hijerarhijski predikat prevladavanja direktnih opravdanja nad indirektnima.

Definicija 33 (Kanonski model logike **EVL**$^+$)**.** Kanonski model logike **EVL**$^+$ jest uređena osmorka:

$$*^K = \langle \mathcal{D}^K, \mathcal{A}^K, \mathcal{E}^K, \mathcal{T}_0^K, \mathcal{T}^{\mathcal{K}}, \mathcal{V}^K, \mathcal{O}^K, \phi^K \rangle.$$

Vrijede svi uvjeti iz definicije 27 (str. 120) kanonskoga modela logike **EVL** uz dodatne uvjete za funkciju $\mathcal{T}^K$:

- $\langle t, s\rangle \in \mathcal{T}^K(H)$ akko $Hts \in \Gamma_\omega^{max}$.

Kao i u logici **EVL**, primjenjuje se definicija 20 (str. 108) zasićenoga skupa. Pritom je $\mathcal{T}^K(H)$ kao u definiciji 32, odnosno:

$$\mathcal{T}(H) = \{\langle t, s\rangle \mid \mathcal{O}(t) \in \mathcal{T}^K(I), \mathcal{O}(s) \in \mathcal{T}^K(I)\}.$$

Lema 8 (Istinitosna lema)**.** Zadovoljivost u kanonskom modelu: za svaki iskaz F vrijedi da ako je formula član maksimalnoga suvisloga skupa Γ_ω^{max}, onda je istinita u kanonskom modelu za Γ_ω^{max}:

$$\vDash_{*^K,\mathcal{V}} F \text{ akko } F \in \Gamma_\omega^{max}.$$

Dokaz. Dokaz je indukcijom po duljini iskaza analogan dokazu leme 5 (str. 109) logike $\mathbf{EVL}^-$ te leme 7 (str. 120) logike **EVL**. Izvodimo dokaz za iskaze oblik Hts, dok su ostali oblici dokazani u lemi 5 logike $\mathbf{EVL}^-$ i u lemi 7 logike **EVL**.

Neka je F formula oblika Hts. Pretpostavimo da je $Hts \in \Gamma_\omega^{max}$. Po definiciji 33 kanonskoga modela slijedi da su $\langle t, s\rangle \in \mathcal{T}^K(H)$. Po uvjetima istinitosti iz definicije 32 (str. 124) slijedi $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} Hts$. U drugom smjeru pretpostavimo $\vDash_{*^K,\mathcal{V}} Hts$ te po definiciji 32 slijedi $\langle t, s\rangle \in \mathcal{T}^K(H)$, što po definiciji 33 (str. 126) daje $Hts \in \Gamma_\omega^{max}$.

□

Po lemi 5 (str. 112), lemi 8 te po poučku 2 (str. 112), analogno kao i u logici $\mathbf{EVL}^-$ te logici **EVL**, slijedi da ako $\Gamma \vDash F$, onda $\Gamma \vdash F$, čime je logika $\mathbf{EVL}^+$ potpuna.

Poglavlje 6

Rezultati formalizacije

6.1 Logika EVL$^-$

Prva logika $\mathbf{EVL}^-$ služi kao formalni opis svih evidencijalnih jezika, ali i svih jezika s epistemičkom modalnošću (usp. poglavlje 4.1). Svi poznati jezici svijeta mogu izraziti epistemičku modalnost kao izvor dokazne građe na neki način, odnosno izraziti svoj stav prema tvrdnji koja je izrečena. Međutim, ako se takav način opravdanja obligira, radi se o evidencijalnim jezicima. Logika $\mathbf{EVL}^-$ tako vrijedi za način izražavanja dokazne građe u svim jezicima svijeta u kojima je epistemičkim modalima (najčešće prilozima, česticama i raznim afiksima) moguće izraziti stav prema izrečenome, koji je blizak stupnju sigurnosti u takvu tvrdnju. Takav stav nije analogan evidencijalu ili opravdanju, ali može mu biti vrlo blizak.

U logici $\mathbf{EVL}^-$ klasični su aksiomi logike opravdanja, odnosno logike dokaza, djelomice preuzeti i modificirani te prošireni. Ostavili smo aksiom primjene, koji će opisivati zaključivanje racionalnoga govornika koji prihvaća i logičke posljedice svojih opravdanja. Na isti način ostavljen je aksiom zbroja, gdje ako govornik bilo koje drugo opravdanje za neku formulu doda uz postojeće opravdanje, oni zajedno i dalje opravdavaju početnu formulu. Analogno je ostavljen i provjerivač dokaza pod intuicijom da se svako opravdanje može provjeriti nekim drugim opravdanjem. Dakako, ovdje bismo mogli govoriti o pitanju regresa i postoje li kakva opravdanja koja se više ne mogu provjeravati, no u ovakvoj logici takva pitanja još ostavljamo otvorenima na temelju generalizacije na sve jezike.

Cilj nam je bio pokazati kako se iz opravdanja mogu izvesti i posljedice vezane uz znanje i vjerovanje. Naime, neki klasični epistemički aksiomi logika znanja (epistemičnih logike) i logika vjerovanja (doksastičnih logika) pokazani su kao teoremi ovoga sustava, odnosno već je logika $\mathbf{EVL}^{-}$ njihov nadskup. Uspješno su izvedeni aksiomi logičkih posljedica/distributivnosti znanja i vjerovanja te pozitivne i negativne introspekcije. Izveden je aksiom istinitosti znanja, ali ne i vjerovanja jer vjerovanje neće uvijek voditi do znanja, analogno tomu u našem sustavu niti opravdanje za neku tvrdnju ne vodi do znanja, nego samo ako je to opravdanje prihvaćeno i znanjotvorno. To je velika razlika u odnosu na standardne logike opravdanja, a posebice logike dokaza. Smatramo da je tvrdnja $t{:}F \rightarrow F$ (odnosno ako opravdanje t opravdava formulu/tvrdnju F, onda je ona istinita) vrlo jaka tvrdnja, koja je ostavljena u logici opravdanja zbog tehničkih posljedica koje bi izazvao nedostatak faktivnosti. U našim logikama takva tvrdnja vrijedi, analogno epistemičnoj logici, samo ako se radi o znanjotvornom opravdanju.

Uočeno je kako smo morali uvesti aksiom Ax9, kojim se tvrdi da ako govornik prihvaća neko opravdanje za neku tvrdnju, onda on smatra da je to opravdanje znanjotvorno, premda to doista ne mora biti – a često i nije – slučaj. Međutim, naglasak stavljamo na racionalnost govornika: upravo zato klasični modalni aksiom distribucije vrijedi (i u svojim inačicama za opravdanja koja su prihvaćena i znanjotvorna), stoga bi bilo nerazumno pretpostaviti da činitelj prihvaća opravdanje za koje ne misli da vodi do znanja. To je zanimljiva epistemološka pretpostavka koja nam je formalno bila nužna da bismo uspjeli izvesti aksiom pozitivne introspekcije epistemične logike. Naime, ako bismo prihvatili kakvu eksternalističku epistemološku teoriju opravdanja, moglo bi se raditi o pouzdanim procesima proizvodnje znanja, ali to ne znači da bi slijedila tranzitivnost znanja. Govornik bi mogao znati kakvu tvrdnju, a istodobno ne znati da je doista zna, odnosno nemati introspekciju o tome, možda na temelju sekundarnih indirektnih opravdanja ili autoriteta.

U ovakvoj logici moguće je imati opravdanje za tvrdnju *Superman leti*, ali nemati opravdanje za tvrdnje *Kal-El leti* ili *Clark Kent leti*. U slučaju identiteta, odnosno opravdanja za tvrdnju da Superman jest Kal-El ili da Superman jest Clark Kent, iz uvjeta zatvorenosti slijedi i opravdanje za tvrdnje *Kal-El leti* i *Clark Kent leti*. Odnosno, primjerice tvrdnja *Ako je osoba Superman, onda ona leti* jest $F \rightarrow G$ te imamo neko znanjotvorno opravdanje $t{:}_E(F \rightarrow G)$ za pogodbu. Tvrdnja *Clark Kent/Kal-El jest Superman* jest F i imamo neko znanjotvorno opravdanje $s{:}_E F$ o Supermanu. Pomoću uvjeta zatvorenosti i aksiomatskih shema možemo izvesti $(s \cdot t){:}_E G$ za tvrdnju *Clark Kent/Kal-El leti.*

6.2 Logika EVL

Logika **EVL** proširena je razlikovanjem direktnih i indirektnih opravdanja u sklopu predikata. Ostavljamo razlikovanje znanjotvornih i prihvaćenih opravdanja, ali sva opravdanja ili su direktna ili su indirektna. Takav sustav najbolje opisuje evidencijalne jezike općenito, jer svaki evidencijalni jezik, na temelju donesenoga konsenzusa lingvističke klasifikacije (usp. poglavlje 4.2), uvijek razlikuje barem direktna od indirektnih opravdanja. Direktnih opravdanja može biti više (primjerice, vid i različiti senzorni doživljaji), kao i indirektnih (općenito zaključivanje, informacije iz druge ruke i reportativne informacije općenito), stoga poopćavamo moguće razlikovanje u dvije glavne skupine, koje ujedno opisuju ne samo dvočlane vrste evidencijala nego i višečlane na temelju generalizacije.

Ovdje pak ontološki ipak uvodimo vrste opravdanja: više opravdanja nisu vezana samo uz atomarne opravdavajuće formule $t{:}F$ nego su i predmet priricanja, odnosno predikatima im se daje svojstvo direktnosti ili indirektnosti. U dvočlanim evidencijalnim sustavima postoje opreke iz prve ruke – ne iz prve ruke, iz druge ruke – sve ostalo, reportirano – sve ostalo, senzorna evidencija – reportirano, auditorno – sve ostalo, pri čemu je posljednji slučaj zabilježen samo u jednom jeziku te generalizacije radi izlazi iz poopćenoga sustava. U svim ostalim primjerima vidimo da se opreka doista da svesti na direktnost i indirektnost, čak i ako se indirektnost čini možda primarnom, odnosno obilježenom. Međutim, obilježenost (kakvim afiksom i sl.) ne mora nužno značiti i hijerarhijsku snagu, ostatak gramatikaliziranih izričaja može se gledati kao normalan i jači, dok afiksi za izvor informacije iz druge ruke postaju markeri nesigurnosti, kao što su to u indoeuropskim jezicima modalne čestice ili prilozi kao npr. "navodno".

U višečlanim evidencijalnim sustavima opreka je mnogo više, od tročlanih sustava pa sve do pet i više izbora. Međutim, ako ne ulazimo u pitanje hijerarhije, takvi se sustavi i dalje daju generalizirati pod opreku direktnosti i indirektnosti pojedinih opravdanja. Primjerice, u tradicionalnom kalifornijskom indijanskom jeziku wintu razlikuju se vizualni, nevizualni senzorni, inferencijalni, iskustveni (vezan često uz opće znanje) i reportativni evidencijal. Čak i u toliko nijansiranoj klasifikaciji možemo u direktna opravdanja svrstati vizualne i nevizualne senzorne, a u indirektna opravdanja inferencijalne, iskustvene i reportativne evidencijale.

Direktna opravdanja u takvim jezicima smatraju se najpouzdanijima, odnosno direktni evidencijali obično su vezani uz znanje, posebice uz vid. Takva veza i lingvistički je motivirana, odnosno riječi "vidjeti" i "znati" nerijetko su srodne.[112] Primjerice, praindoeuropski korijen **weyd-, *woyd-* znači "vidjeti", ali nerijetko u jezicima i "znati". U hrvatskom je to *vid-jeti*, no i *vijest*, ali usp. stsl. oblik perfekta *vědě* = "znam". U latinskom je *vidēre* = "vidjeti", ali u grčkom *eíd-omai* = "vidjeti", ali i *idéā* = "izgled", "tip", "ideja". U njemačkom nalazimo *wissen* = "znati", ali i u engleskom *wise* = "mudar" i *wit* = "domišljatost". U sanskrtu *vindáti* znači "znati", ali i "vidjeti", dok perfekt *veda* znači "vidio sam" i shodno tomu "znam".[113]

Bitna je odlika sustava da je rezultat zaključivanja na temelju varijacija *modus ponens* uvijek indirektno opravdan, što odgovara situaciji u evidencijalnim jezicima, gdje su inferencijalna opravdanja indirektna.

6.3 Logika EVL$^+$

U posljednjoj logici $\mathbf{EVL}^+$ nakon generalizacija došli smo do konkretnoga prirodnoga jezika i pokazali kako u tibetskom direktna opravdanja imaju prednost nad indirektnim opravdanjima. To je potkrijepljeno i učenjem jezika. Spomenuli smo kako pri usvajanju jezika djeca vrlo rano usvoje izravne evidencijale, a tek poslije neizravne, uglavnom zbog zaključivanja kao kompleksnoga procesa. Garret smatra da tibetski posjeduje egoforni evidencijal koji označava direktno znanje koje nije posredovano ni percepcijom niti zaključivanjem, a takav smo evidencijal interpretirali kao opravdanje za aksiome, koje govornik intuitivno *zna*. Direktni evidencijali ostaju vezani uz senzorna iskustva, posebice vid, dok su indirektni vezani uz zaključivanje te informacije iz druge ruke.

Na temelju novih aksioma pokazali smo već u logici $\mathbf{EVL}$ kako je rezultat zaključivanja uvijek indirektan, odnosno inferencijalni evidencijal gledamo kao indirektno opravdanje, što je slučaj u evidencijalnim jezicima, a tako i u tibetskom. Čak i ako bi se gledale različite lingvističke analize – jer postoje prijepori oko broja evidencijala u tibet-

[112] Godina 1987. smatra se neformalnim začetkom kognitivne lingvistike. Tada George Lakoff izdaje knjigu o konceptualizaciji i metafori *Women, Fire, and Dangerous Things* [104], no iste godine Turner [154] izdaje *Death is the Mother of Beauty*, gdje viđenje gleda kao temeljnu razinu metafore. Konceptualna metafora VIDJETI JE ZNATI vrlo je česta u kognitivnolingvističkim analizama jezika svijeta.

[113] Usp. zato su Vede knjige znanja.

skom – opreka na direktnost i indirektnost i dalje bi ostala valjanom, samo što bi se bolje raščlanile kategorije.

Dodali smo aksiome Ax17 i Ax18, čime smo pokazali da ako postoje direktna i indirektna opravdanja za istu tvrdnju, direktna su nam – po evidencijalnoj hijerarhiji i analizi tibetskoga – jača i shodno tomu relevantnija (usp. poglavlja 4.5 i 4.6.3). Također ne dopuštamo da su takvoj hijerarhiji istodobno dva različita direktna opravdanja ili dva različita indirektna opravdanja (primjerice razlikovanje između reportativnoga i pretpostavljenoga opravdanja). Naime, smatramo da je hijerarhija jasna između direktnih i indirektnih opravdanja, ali nije u lingvističkim analizama dovoljno nijansirana između različitih vrsta direktnih i različitih vrsta indirektnih opravdanja, a u brojnim se studijama i ne smatraju zasebnim entitetima.

Pokazali smo kako se ova logika jednostavnom modifikacijom logike **EVL** i uvođenjem dodatnih predikata može iskoristiti kao alat za opis hijerarhizacije evidencijske snage u bilo kojem evidencijalnom jeziku, uz adekvatno proučavanje lingvističke građe i opisa evidencijalnosti.

6.4 Logika prirodnoga jezika

6.4.1 Osnove tibetske logike

Klasična logika nikad potpuno ne slijedi prirodni jezik jer su poznati standardni problemi primjerice neintuitivnosti pogodbe. Zanimljivo je usporediti koliko se tibetska klasična logika – motivirana prirodnim jezikom – zapravo razlikuje od prijedloga logike tibetskoga jezika.

Tillemans [149] smatra da postoje dvije glavne struje tibetske logičko-epistemološke tradicije. Prvu je školu utemeljio Sakya Pandita (*Sa skya Paṇḍita Kun dga' rgyal mtshan*) iz 12./13. stoljeća, koji je napisao *Rigs-gter*, *Traktat o zaključivanju*, te uspostavio Dharmakīrtija kao glavni epistemološki uzor. U drugu tradiciju spadaju filozofi Ngok Lotsawa Loden Sherab (*ngog lo ts'a ba blo ldan shes rab*) i Chapa Chögyi Sengé (*phywa pa chos kyi seng ge*) sa svojim učenicima (djela mu nisu preživjela) iz 11./12. stoljeća. Chapa je napisao *Tshad ma'i bsdus pa*, *Sažeci epistemologije i logike.*

Tibetska logika nastala je u ozračju tibetskoga budizma, a glavni je izvor tibetske epistemologije i nauka o zaključivanju budistički tekst *Pramāṇavārttika* (*Komentar o valjanoj kogniciji*), posebice poglavlje o valjanom znanju (*pramāṇasiddhi*) [52]. Valjan je izvor znanja Buda, što je u raznim evidencijalnim jezicima slično šamanima i vračevima, koji imaju pravo rabiti direktne evidencijale za svoje proročke snove. Kognicija ne ovisi samo o senzornom opažanju i organima nego i o svjesnosti prošlih događaja (*manovijñāna*).

U tibetskoj logikoepistemologiji valjano znanje smatra se neosporivim, autentično je istinito i sigurno, dok se u standardnoj logici razlikuje empirijsko znanje koje je kontingentno i osporivo te matematika i formalna logika koje imaju sigurnost i pravo znanje [133, str. 29].

Često se u tibetskoj logici zamjenice rabe za varijable, npr. zamjenica drugoga lica jednine *khyod* [148, str. 269]. Egzistencija se označava pomoću identiteta, odnosno "ako postojiš, prožet si identičnošću sa sobom", što Tillemans formalizira kao $(x)E!x \rightarrow x = x)$. Postoje i redundantni kvantifikatori koji ne vežu varijable. Dharmakīrti[114] u svojoj logičkoj epistemologiji uspostavlja vezu između opravdanja tvrdnje i uvjeravanja [148, str. 274]. No, ne mora postojati nužna veza među termima da bi se uspostavilo uvjeravanje, primjerice ako imamo iskaz u kojem smo sigurni da je prednjak neistinit, npr. uključuje zečji rog, bit će nemoguće pokazati protuprimjer, ali ne zbog nepostojeće veze s posljetkom, nego zato što ne postoje instancije takvih zečeva s rogovima. Odnosno, posljedak može biti bilo što, sve dok prednjak ostaje da je neki x zečji rog te će cijela pogodba biti istinita [148, str. 276]. To je blisko pravilu *ex falso quodlibet*.

Kako bi se uspostavila svojstva subjekta u silogizmu, treba se dokazati kako je takav znak doista svojstvo subjekta. Dokaz ne može biti općenit ili apstraktan, odvojen od specifične baze, odnosno po riječima Ge-shaya Pel-den-drak-paa[115]: *Ne postoji točan znak bez subjekta, zato što ne postoji bolji način da se razumije znak u dokazu osim ako nije povezan uz subjekt. Primjerice, ne bi postojao način da se razumije rezultat kao točan znak u dokazu nestalnoga [bez specificiranja bilo kojega subjekta]* [133, str. 37]. Odnosno, znak mora biti točan, a predikat kao nestalno mora biti nešto naravno povezano sa znakom ili rezultatom, odnosno biti adekvatna karakterizacija subjekta na koji se odnosi. To možemo povezati s predikatima direktnosti, indirektnosti ili hijerarhije – kako bi takvo

[114] Dharmakīrti je bio budistički filozof 6. ili 7. stoljeća, jedan od ključnih učenjaka epistemologije u budističnoj filozofiji, također jedan od teoretičara budističkoga atomizma [150].

[115] Tibetski učenjak logike iz Lo-sel-linga [133].

pridjevanje svojstava funkcioniralo, mora doista postojati jaka veza i svojstvo opravdanja da doista budu direktna, indirektna ili međusobno u hijerarhiji.

Tillemans [148, str. 287] navodi kako je debatnu logiku teško prevesti u klasičnu, ali neki oblici analogni su. Nalazi se *modus ponens, modus tollens* i supstitucija, potom negacije pogodbe, konjunkcije i disjunkcije (uključeni su i de Morganovi zakoni) te *reductio ad absurdum*. Smatra se kako su teorije formalne logike ovdje teorije predikatne logike, što je u skladu s našim odabirom logike prvoga reda da bismo opisivali znanje i vjerovanje, a potom direktnost, indirektnost i hijerarhiju opravdanja. Međutim, treba imati na umu kako takvi oblici nikad nisu eksplicitno formulirani niti jasno diskutirani.

6.4.2 Stjecanje i osporivost znanja

Sve budističko-logičke škole prepoznaju tzv. *pramāṇa* u značenju dokaza ili načina stjecanja znanja te se radi o nekoj vrsti epistemologije. Tibetska logika bazira se na budističkoj filozofiji te su *pramāṇa* ključan dio tibetske logike koji možemo povezati s evidencijalima. Naime, to su različiti načini usvajanja točnoga znanja, koji se zapravo odnose na procese koji uključuju i opravdanje za tvrdnje: [67, str. 225]

- percepcija (skr. *pratyaksa*)
- zaključivanje (skr. *anumāna*)
- usporedba i analogija (skr. *upamāna*)
- postuliranje (skr. *arthāpatti*)
- nekognicija (skr. *anupalabdhi*)
- verbalni autoritet (skr. *śabda*).

Ovisno o školama, neki odbacuju neke vrste znanja kao sekundarne i često ih svode pod ostale, stoga su četiri glavne obično percepcija, zaključivanje, usporedba i verbalni autoritet (kao npr. u [127]). Zanimljivo je kako škola Cārvāka[116] glavnim ili možda jedinim mogućim izvorem znanja smatra percepciju, no i tu postoje razne interpretacije radi li se o jedinom mogućem ili samo temeljnom izvoru znanja [78].

[116] Cārvāka je indijska škola materijalizma, koja smatra izravnu percepciju, empiricizam i kondicionalno zaključivanje izvorima znanja te naglašava filozofski skepticizam [123].

Svaki je od tih načina dalje raščlanjen u odnosu na pouzdanost i mogućnost pogreške i neke *darśana*[117] prihvaćaju samo neke od tih načina.

Potter [127, str. 154] razlaže sudove, koji mogu biti prezentativni i memorijski, odnosno potonji se odnose na ono što je prije bilo prezentirano. Prezentativni nas sudovi više zanimaju jer su tipične jezične tvrdnje, koje mogu biti istinite i neistinite. One neistinite neistinite su zbog sumnje, pogreške ili pogrešnoga zaključivanja, dok istinite opravdavamo na temelju percepcije, zaključivanja, usporedbe ili verbalnoga svjedočenja.

Zanimljivo je kako se pamćenje ne smatra mogućnošću istinitoga znanja, odnosno smatra se da percepcija mora biti sadašnja i izravna da bi bila istinita. Primjerice, filozof Jayanta[118] objašnjava da se pamćenje ne može smatrati istinitim znanjem jer njegov sadržaj nije u kauzalnim faktorima: kad se sjećamo x, sjećamo se traga koji je proizveo x, a ne samoga x, što je krucijalni kauzalni faktor [127, str. 172]. Takva filozofija razlikuje se od naše logike koja opisuje prirodni jezik i u kojem pamćenje može voditi do znanja ako se radi o direktnom ili legitimnom izvoru dokazne građe. Smatramo kako je većina iskaza uvijek orijentirana na barem vrlo recentnu prošlost i kako se fizikalno nemogućim čini da percepcija i iskaz o toj percepciji budu istovremeni. Posljedica je toga da su iskazi u prirodnom jeziku gotovo uvijek na neki način memorijski.

Percepcija

Pratyakṣa se odnosi na percepciju, izvor je istinitih sudova. Prema Gautami, sud je perceptivan i istinit samo ako: 1) proizveden je kontaktom između senzornoga organa i objekta, 2) nije verbalan (*avyapadeśya*), 3) "ne luta" (*avyabhicāra*), 4) određen je (*vyavasāyātmaka*. [127, str. 161] Prvi se uvjet odnosi na normalnu percepciju objekata. Drugi uvjet generalno isključuje verbalne autoritete, odnosno informacije iz druge ruke. Treći uvjet razgraničava takvu percepciju od pogrešnih sudova, u smislu da perceptivna prosudba ne luta, odnosno ne griješi. Tipični su primjeri priviđenja ili halucinacije. Za-

[117] *Darśana* je sanskrtski termin, koji se obično prevodi kao "filozofija" ili "teologija", sustav misli izražen tradicijom komentara nad fundamentalnim tekstovima, izveden iz korijena *dṛś* = "vidjeti", u smislu vizije svijeta, a tako i znanja, što je povezano s bliskom poveznicom vida i znanja, koju smo bili raščlanili (str. 130).

[118] Jayanta Bhatta hinduistički je filozof škole *nyāya*, o kojoj je napisao tri traktata, a živio je u 9. stoljeću nove ere [127].

nimljivo je da već prvi uvjet isključuje snove, koji premda su vizualni, ipak ne postoji direktni kontakt između senzornoga organa i objekta u izvanjezičnoj stvarnosti.

Također, pogrešni mogu biti samo propozicionalni percepcijski sudovi, dok nepropozicionalni zahvaćaju vlastitu prirodu sadržaja (*svarūpa*), odnosno možemo imati jezični ostvaraj kakvoga objekta, npr. krave, na nepropozicionalan način, no čim povežemo da objekt ispred nas dijeli svoju *kravost* s drugim objektima iste vrste, dolazimo do propozicijskoga suda i prigode za pogrešku, jer predložena relacija može biti pogrešnom. Četvrti uvjet definiranosti isključuje sudove sumnje, primjerice *vidim li ovo bodež ispred mene?* – takvi su sudovi percepcijski, ali nisu istinitonosni. Primjerice, govornik može vidjeti komad zlata, ali ako se ispostavi da je riječ o lažnom zlatu, konstituirao je neistinitu relaciju između toga objekta i svojstva zlatnoga. Također, ako se ništa ne tvrdi, nema niti pitanja istinitosti ili neistinitosti: sumnjama se ništa ne tvrdi [127, str. 161-167].

Takva situacija odgovara većini evidencijalnih jezika. Naime, u nekim jezicima evidencijali su obligatorni u gotovo svakoj tvrdnji, dok su u većini jezika uglavnom obligatorni, ali isključuju se razne sumnje, usklici ili emotivni iskazi, što odgovara budističkoj tibetskoj logici, gdje bi takvi iskazi pali na četvrtom uvjetu i doista im ne bismo određivali istinitosnu vrijednost.

Međutim, moguće je imati i neobične forme percepcije. Primjerice, za yogine se vjeruje kako imaju neobične moći te mogu percipirati stvari koje ne percipiraju normalna ljudska bića, a spominju se i različiti slični mudraci. Oni imaju izvor znanja koji jest intuicija, koji je za obične ljude takav tek povremeno [127, str. 168]. Takva situacija odgovara brojnim evidencijalnim jezicima, gdje vračevi mogu rabiti direktne perceptivne evidencijale za svoje snove, premda ostali ljudi ne mogu – samo za njih radi se o direktnom viđenju i shodno tomu znanju.

Indijski filozof Kaṇāda[119] tvrdi da iskazi sumnje nastaju zbog triju uvjeta 1) percepcije nečega da je opće 2) pogreške u percepciji razlikovnih karakteristika 3) sjećanje takvih razlikovnih karakteristika. Primjerice, percipiramo da x i y imaju zajednički skup karakteristika, sjetimo se da x ima specifična svojstva koje y nema i ne možemo jasno vidjeti je li objekt u sjećanju x ili y. [127, str. 170]

U našoj logici perceptivni izvori za znanje direktni su evidencijali, koji u raznim jezicima mogu biti raščlanjeni na različite senzorne modalitete, npr. vizualne ili auditorne. Svi

[119] Kaṇāda je bio indijski filozof i fizičar, zagovornik atomizma te logike, realizma i realistične ontologije. Smatrao je da se sve može dijeliti, ali dijeljenje mora stati na najmanjim nedjeljivim entitetima *parmanu*. Vjerojatno je živio između 6. i 4. stoljeća p. n. e. [127]

evidencijalni jezici imaju opreku između direktnih evidencijala, koji su senzorni, i neke vrste indirektnih evidencijala, stoga je ovakav izvor usvajanja znanja analogan tibetskoj i budističkoj indijskoj filozofiji i logici.

Spomenuto je kako škola Cārvāka smatra percepciju glavnim, ako ne i jedinim izvorom znanja. Stoga nam se čini da upravo logika **EVL** oslikava takav nauk, jer samo direktni evidencijali – koje smatramo senzornima, odnosno percepcijskima – vode do znanja, pomoću aksioma Ax16: $(Dt \wedge t{:}F) \rightarrow (t{:}_A \wedge t{:}_E F)$, a znanje smo po definiciji 14 (str. 86) definirali kao kombinaciju prihvaćenoga i znanjotvornoga opravdanja. Na temelju aksioma Ax10 – $t{:}_E F \rightarrow F$ – takve su tvrdnje ujedno i istinite.

Zaključivanje

Nyāya ili nauka o zaključivanju centralna je u budističkoj logici, a tako i u indijskoj, kao i u tibetskoj filozofiji te je ime dala i istoimenoj školi[120]. Kaṇāda i Gautama gledali su na zaključivanje kao na način na koji utvrđujemo kauzalne uvjete ili pak učinke danih uzroka [127, str. 182]. Zaključivanje je poseban način usvajanja znanja jer nam daje znanje o stvarima s kojima nismo neposredno upoznati, a Gautama smatra da zaključivanje slijedi percepciju. Odnosno, moramo percipirati h i p, moramo imati pamćenje o promotrenoj vezi između s i h te promotriti sva tri člana zaključka. Pritom je p *pakṣa*, ono o čemu se zaključuje, h je *hetu*, svojstvo vezano uz s, a s je *sādhya* ili svojstvo za koje se dokazuje da kvalificira p. Primjerice u konkluziji *Ova planina ima vatru* p je ova planina, s je posjedovanje vatre, a h je to da smo vidjeli da planina ima dim [127, str. 181].

Samo zaključivanje ili *anumāna* može biti posredno ili neposredno. U posrednom slučaju postoji veza *vyāpti* između većega i srednjega pojma i smatra se kako neposredna zaključivanja ne uključuju znanje *vyāpti* te ne ulaze u *anumāna* [116, str. 204].

Slično definiciji *anumāna* rezultat primjene uvijek je indirektan prema aksiomu Ax15: $I(s \cdot t)$, dok primjenu dobivamo na temelju aksioma Ax1: $s{:}(F \rightarrow G) \rightarrow (t{:}F \rightarrow (s \cdot t){:}G)$. U takvim slučajevima doista se slijedi *anumāna*. Međutim, indirektnost se

[120] *Nyāya* doslovno označava pravila, sud ili metodu, a jedna je od škola hinduizma, čija je glavna zasluga razvoj teorije logike i epistemologije. U ovoj se školi prihvaća šest temeljnih načina usvajanja znanja. Filozofski su zagovarali direktni realizam i smatrali da je sve što postoji filozofski spoznatljivo [127] .

kao opravdanje i evidencijal može staviti i na neposredne zaključke, što je čest slučaj u evidencijalnim jezicima.

Usporedba i analogija

Upamāna se bavi analogijom. Primjerice, netko pokaže govorniku kravu i onda opet vidi stvorenje slično prvom stvorenju i zaključi da je to *krava*. Gautama je smatrao da je to sud svoje vrste, koji nije ni percepcija niti zaključivanje: nije perceptivni sud jer mu je sadržaj lingvistička forma riječi (*krava*) te se uporaba ne može percipirati, a nije niti zaključivanje jer nam ono daje znanje o stvarima koje se mogu provjeriti percepcijom. [127, str. 194]. Međutim, ne slažu se svi filozofi i interpretatori s takvim tvrdnjama.

U našoj logici i u prirodnom evidencijalnom jeziku takve bi rečenice mogle biti bliske zaključivanju iz senzornoga iskustva, odnosno postoje inferencijalni senzorni evidencijali, koji su ujedno i direktni i inferencijalni te se radi o zaključivanju na temelju viđene dokazne građe. Takva bi vrsta opravdanja bila vrlo slična usporedbi ili analogiji, dok bi se u nekim jezicima (ovisno o broju evidencijala) mogla izraziti ili inferencijalnim evidencijalima ili direktnim evidencijalima.

Postuliranje

Datta [116, str. 237] definira postuliranje kao pretpostavljanje postojanja neke tvrdnje. Radi se o pretpostavci, primjerice o zaključku na najbolje objašnjenje, ali i o posljedicama, npr. tvrdnja *On ne spava po danu* neizbježno vodi do tvrdnje *On spava po noći.* Postavlja se pitanje mogu li se razne vrste takvoga postuliranja smatrati zaključivanjem, a jedan je od odgovora da govornik nikad neće reći da zaključuje nego samo da pretpostavlja. Prema nekim školama stoga ovo neće biti temeljna vrsta načina usvajanja znanja.

Za takve će vrste usporedbi zapadni logičari tvrditi da su neposredna nesilogistička zaključivanja [116, str. 151]. U logici **EVL** radi se o indirektnom evidencijalnom opravdanju, koje u specifičnim jezicima može biti tzv. pretpostavljeni evidencijal, odnosno radi se o posebnoj vrsti evidencijala za pretpostavke. Takva vrsta doista se može svesti na inferencijalne evidencijale, ali u nekim jezicima – ako bismo proširili logiku **EVL** na predikate jezika s više kategorija evidencijala, uključujući i pretpostavljeni evidencijal, takva vrsta može biti primarnom, primjerice u četveročlanim evidencijalnim sustavima (**C2**), kao npr. u ekvadorskom barbakoanskom jeziku tsafiki ili u amazonskom jeziku shipibo-konibo.

Za tibetske primjere v. poglavlje 4.6.2. Općenito u evidencijalnim jezicima, ne samo u tibetskom, doista možemo imati takve pretpostavke, primjerice u cuzco-kečui [55, str. 21]:

(76)	Pilar-qa	yachay	wasi-pi-**chá**	ka-sha-n
	Pilar-TOP	znati	kuća-LOC-EVID	biti-PROG-3

“Pilar mora biti/je možda u školi.”

Treba imati na umu kako je većina inferencijalnih evidencijala upravo neposredna, odnosno ne moramo imati izražene sve premise kako bismo stavili inferencijalno opravdanje na neku tvrdnju – takve tvrdnje funkcioniraju kao skraćeni zaključci.

Nekognicija

Anupalabdhi ili negativni kognitivni dokaz jest sud o nepostojanju stvari. Sudovi o postojanju bazirani su na zaključivanju, svjedočenju i slično, no stavlja se naglasak na to kako se sud o nepostojanju može uopće donijeti, odnosno znanje o nepostojanju mora imati kakvo posebno opravdanje. Primjerice *Sada nema vrča na tlu* izgleda kao perceptivni sud jer je izvedeno znanje trenutno, no problemi se susreću kad pokušavamo obuhvatiti nepostojanje. U indijskoj filozofiji koncept nepostojanja (*abhāva*) rješava se na tri načina. Škola Prābhākara[121] tvrdi da nepostojanje nema stvarnost odvojenu od postojeće stvari, a o tlu bez vrča na sebi sudi se na temelju referencije na samo tlo te se ne treba pretpostaviti da nepostojanje ima zasebnu realnost. Škola Sāṃkhya[122] tvrdi da je forma bez sadržaja identična s postojanjem vrča na tlu [116, str. 161–162].

Škola Nyāya tvrdi da stvar na nekom mjestu biva pridjevom za nj, odnosno tlo je karakterizirano nepostojanjem vrča i nepostojanje je svojstvo tla te se percipira percepcijom

[121] Prabhākāra je bio indijski filozof i gramatičar u tradiciji *mīmāṃsā*, koja se odnosi na tradiciju kontemplacije i dijegeze vedskih tekstova preko različitih epistemoloških doktrina. Prema njemu je nazvana i škola, koja se smatra sličnom školi Cārvāka [116].

[122] Sāṃkhya je hinduistička škola, koja prihvaća svih šest načina usvajanja znanja. Pobornici su dualizma, gdje se svemir sastoji od svijesti (*puruṣa*) i materije (*prakṛti*) [116].

samoga tla [116, str. 163]. Takav je sud analogan mogućim tvrdnjama koje opisuje naša logika jer bi takvi iskazi dobili obično direktni evidencijal percepcije.

Verbalni autoritet

Śabda se smatra učenjem dostojne osobe (*āpta*), autoriteta, koja ima kakvo znanje. Smatra se da se takva osoba - bez obzira na njezine kvalitete - uzima kao legitiman izvor znanja te bi sveznajuća osoba mogla biti autoritetom za sve. Gautama sudove verbalnoga autoriteta dijeli u dvije vrste: 1) gdje je objekt viđen 2) gdje objekt nije viđen, a potonja vrsta pripada u spomenute posebne moći mudraca. Kaṇāda smatra da su sudovi izvedeni iz verbalnoga autoriteta neka vrsta zaključivanja, no filozof Jayanta smatra da se ne može raditi o zaključivanju kad se autoritet bazira na pojedinim riječima, a zaključivanje zahtijeva cijele rečenice. Zaključivanje ne može dokazati da riječ ima kapacitet prenijeti značenje ili da doista pokriva to značenje [127, str. 176-177].

6.4.3 Znanje i opravdanje

Svi navedeni načini stjecanja znanja zapravo mogu voditi do znanja u slučaju da su istiniti i da su metode valjane, što odgovara našoj opciji da svako opravdanje može voditi do znanja u slučaju da govornik prihvaća to opravdanje i da to opravdanje doista proizvodi znanje. Odnosno, ako je neko opravdanje u skupu znanjotvornih opravdanja, taj je skup analogan navedenim skupovima koji vode do znanja.

Samo direktna opravdanja vode do znanja (i u skladu sa školom Cārvāka), no moguće je i da neko indirektno opravdanje – koje može biti usporedno, nekognitivno, postulativno ili reportativno od autoriteta – vodi do znanja u slučaju da ga govornik prihvaća i da je član skupa znanjotvornih opravdanja. Odnosno $It \wedge t{:}F \wedge t{:}_A F \wedge t{:}_E F$ vodit će preko definicije 14 znanja (str. 86) do znanja (dakako, već je preko aksioma Ax10 ($t{:}_E F \rightarrow F$) takva tvrdnja i istinita).

Primijetili smo kako načini usvajanja znanja odgovaraju opravdanjima – kao što načini znanja vode do znanja, tako su i opravdanja sastavni dio znanja. Na znanje epistemološki gledamo kao na istinito opravdano vjerovanje. Vjerovanje smo definirali (definicija 13, str. 86) pomoću opravdanja koje govornik prihvaća, dok smo znanje definirali (definicija 14, str. 86) uz pomoć opravdanja koje je u skupu znanjotvornih opravdanja, a takva opravdanja ujedno vode do istine (aksiom Ax10). Na taj način omogućava se da bilo koji od šest načina vođenja do znanja doista i dovede do znanja, no čini se da je naša logika bliska upravo školi Cārvāka jer smatramo da direktna percepcija uvijek vodi do znanja. Škola Cārvāka smatra da je percepcija glavni, ako ne i jedini, način kojim dolazimo do znanja, no mi dopuštamo i druge indirektne načine, kao što je zaključivanje ili reportativnost na temelju autoriteta, što oslikava stanje u prirodnom jeziku, no takve su situacije manje pouzdane od direktne percepcije.

Glavna je tibetska škola zapravo spomenuta Nyāya, a ona prihvaća navedenih šest načina stjecanja znanja (*pramāṇa*). Primjer klasičnoga zaključivanja u takvoj školi jest: [127, str. 180]:

1. Ova planina ima vatru. [pretpostavka]
2. Zato što ima dima. [razlog]
3. Što god ima dima, ima i vatre, kao kuhinja, ali ne i jezero. [primjer]
4. Ova planina, jer ima dima, ima i vatre.
5. Ova planina ima vatre. [konkluzija]

Ovdje je također isključeno neposredno zaključivanje, koje će pak u tibetskom – a i u gotovo svim prirodnim evidencijalnim jezicima – biti glavna metoda zaključivanja, odnosno radit će se o skraćenim zaključcima, pretpostavkama ili analogijama. Često će za takve vrste postojati i specifični evidencijali, npr. pretpostavljeni evidencijal, inferencijalni evidencijal iz senzornoga iskustva i slično, a dodavat će se kao evidencijali na rečenice i označiti kontekstualnu uvjetovanost na temelju koje se zaključuje (za tibetske primjere v. poglavlje 4.5).

Premda klasična tibetska logika svoj temelj nalazi u hinduističkoj i budističkoj filozofiji, neki su pojmovi ipak povezivi s klasičnom logikom, a zanimljivo je vidjeti koliko je takva filozofija i logika opet u odmaku od prirodnoga jezika. I u samom tibetskom izvori znanja mogu biti i indirektni evidencijali, koji nužno ne moraju biti verbalni autoriteti kao kakvi mudraci, ali opet mogu dovesti do znanja ako izvor iz druge ruke smatramo relevantnim.

6.4.4 Primjena formalizacije i računalna obrada jezika

Formalizacije logika **EVL** i $\mathbf{EVL}^+$ mogu primijeniti na bilo koji evidencijalni jezik, uz modifikacije predikata ovisno o evidencijalima u danom prirodnom jeziku. U logici **EVL** predikate direktnosti i indirektnosti možemo raščlaniti da bolje odražavaju različite vrste direktnih i indirektnih opravdanja, kako bi odgovarale specifičnim jezicima. Primjerice, mogli bismo uvesti predikat reportativnosti za informaciju iz druge ruke i ovisno o potrebama on može biti dvomjestan ili višemjestan, a to vrijedi i za hijerarhijski predikat u logici $\mathbf{EVL}^+$. U slučaju dvomjesnosti možemo hijerarhizacijski odrediti sve moguće kombinacije dvaju ili više evidencijala te vidjeti koje kombinacije ili koje vrste opravdanja mogu dovesti do znanja, a shodno tomu do istine takve tvrdnje.

Prva je primjena takve formalizacije u samom strojnom prevođenju jezika. Takva vrsta formalne hijerarhije mogla bi poslužiti da se odabere adekvatan prijevod ako za kakvu istu rečenicu postoji više evidencijala ili da se pak taj prijevod dodatno nijansira time da postoji nekoliko oprečnih ili nadopunjujućih izvora dokazne građe o istoj tvrdnji. Sama analiza i parsiranje evidencijala u bilo kakvom načinu miniranja i analize teksta nije kompliciran problem, a čak i u situacijama morfološke ili morfonološke promjene evidencijalnih sufikasa, moguće je rabiti standardne mjere sličnosti nizova znakova (engl. *strings*) u računalnoj obradi jezika. Primjerice, neformalno, Levenštejnova udaljenost[123] jest udaljenost između dviju riječi u broju promjena jednoga znaka, bilo da je ta promjena umetanje, brisanje ili zamjena. Udaljenost je najviše duljine dulje riječi, najmanje razlika veličine između dvije riječi, a nula ako su riječi jednake.[124] Na taj način različite morfonološke i fonološke promjene mogu biti lako obuhvaćene u prepoznavanju evidencijala.

Zanimljivo je kako umjetno konstruirani jezik lojban[125] također posjeduje vrlo detaljno razrađen sustav evidencijala [33]. Evidencijali su opcionalni, no kako je cilj lojbana uspostaviti nedvosmislenu komunikaciju, na drugu se primjenu ovakvoga sustava nado-

[123] Nazvana je po sovjetskom matematičaru Vladimiru Levenštejnu, koji se bavio informacijskom teorijom, v. [106].

[124] Primjerice udaljenost između riječi *sobe* i *dobar* jest 3, prvi je korak supstitucija *s* sa *d*, potom *e* sa *a*, a potom dodavanje *r*. Ista je udaljenost između *sobe* i *obad*, prvi je korak brisanje *s*, potom zamjena *e* sa a i potom dodavanje d.

[125] Skupina istraživača u The Logical Language Group započela je s razvojem konstruiranoga i sintaktički nedvosmislenoga jezika 1987. godine, nastavivši se na projekt loglana, izvorno konstruiranoga za lingvistička istraživanja.

građuje i mogućnost izgradnje logičkoga jezika koji bi bio baziran na aksiomima naših logika, s ciljem da se detaljnije izraze evidencijalne strategije.

U usporedbi s prirodnim jezicima, gdje uglavnom nalazimo najviše peteročlane i šesteročlane sustave, moguće je i proširiti logiku **EVL** željenom količinom predikata, a potom nadograditi logiku $\mathbf{EVL}^+$ za hijerarhizaciju različitih evidencijala. U slučaju lojbana radilo bi se, primjerice, o trinaest predikata, no u lojbanu nedostaju neki bitni evidencijali koje smo uočili u raznim jezicima svijeta, primjerice razlika između zaključivanja općenito te zaključivanja iz vizualne građe ili pak nijansiranost u različitim vrstama percepcije. Takav bi sustav mogao obuhvatiti čak i sve poznate evidencijale i poslužiti za konstruiranje umjetnoga jezika koji bi pratio izvor dokazne građe. Ono što u lojbanu nije razrađeno jest hijerarhija takvih izvora informacije, pri čemu bi put postavljen u ovom radu mogao omogućiti još manje dvosmislenosti i višeznačnosti, a čemu logički orijentirani umjetni jezici doista i teže.

lojbanski evidencijal	**značenje**
ja'o	"zaključujem"
ca'e	"definiram"
ja'o	"zaključujem"
ca'e	"definiram"
ba'a	"očekujem"
su'a	"generaliziram"
ti'e	informacija iz druge ruke
ka'u	znanje unutar kulture
se-o	unutarnje iskustvo
za'a	percepcija
pe'i	"mislim"
ru'a	"pretpostavljam"
ju'a	"tvrdim"

Tablica 6.1: Evidencijali u lojbanu

Druga je primjena takve formalizacije u strojnom razumijevanju tekstova u takvim jezicima. Naime, ako bismo obradili kakav evidencijalni tekst, primjerice znanstveni, i analizirali da ima mnogo indirektnih evidencijala ili da se za istu tvrdnju rabe samo slabi evidencijali, mogli bismo već unaprijed zaključiti kako u tekstu postoji mnogo nejasnoća, odnosno kako vjerojatno mnoge tvrdnje ne vode do znanja i nisu dokazano istinite. Isto vrijedi i za općenite tekstove vijesti koji se mogu analizirati iz aspekta konkretnoga znanja ili viđenja ili pak samo iz iskaza različitih svjedoka.

Treća je primjena takve formalizacije upravo u skladu filozofije i lingvistike: način na koji formalno oruđe možemo iskoristiti da bolje opišemo evidencijalne jezike. Spomenuli smo kako se takvi jezici, koliko je nama poznato, dosad nisu formalizirali. Pokušaj formalizacije unutar govornih činova za čejenski dala je Faller [56] orijentirajući se na govorne činove. Međutim, tu se ne radi o pravim formalizacijama nego samo poluformalnim prijevodima određenih odnosa između govornih činova i evidencijala. Ako bi lingvisti iskoristili potpuno i pouzdano logičko oruđe za analizu evidencijalnih jezika – čak i u pragmatičkim aspektima – možda bi neke nove zanimljivosti lako izašle na vidjelo.

Posljednja je glavna primjena formalizacije u istraživanju kako logički aksiomi utječu na odabir epistemološke teorije i obratno. Naša formalizacija računa na pouzdane procese proizvodnje vjerovanja i znanja, no i ovdje smo imali moguću iznimku. Naime, ako bismo prihvatili kakvu eksternalističku teoriju znanja, a ne dodali aksiom kojim možemo izvesti pozitivnu introspekciju,[126] slijedilo bi da govornik doista može ne znati da nešto zna. Takve posljedice mogu biti zanimljive u primjeni na prirodni jezik i u analizi samoga odnosa evidencijala i kategorije opravdanja.

[126] V. poglavlje 5.3.6.

Poglavlje 7

Zaključak

Postoji li uopće nešto kao logika prirodnoga jezika, odnosno način da se formalno adekvatno pokaže način zaključivanja u kakvom jeziku, a da bude adekvatan za taj jezik? Činilo se da klasična logika uspijeva uhvatiti standardne nijanse zaključivanja, no intuitivno se javljaju problemi oko značenja i istinitosti pogodbe i slične posljedice koje vode do mišljenja da je logika samo idealizirani sustav. Odnosno, pitanje je daje li materijalna implikacija doista dobar opis pogodbenih rečenica u prirodnim jezicima. Među takvim se "paradoksima" često navodi problem prazne istinitosti, primjerice rečenice "ako je 1 paran broj, onda je 1 neparan broj" ili "ako su Sjedinjene Američke Države u Aziji, ona marsovci postoje" istinite su jer je prednjak neistinit, a posljedak istinit te je cijela pogodba istinita.[127]

Klasična logika doista jest nastala u indoeuropskom kulturnom krugu i shodno tomu odgovara indoeuropskim jezicima. Međutim, indoeuropski su jezici – prema klasičnom lingvističkom konsenzusu – tek možda $\frac{1}{12}$ jezika svijeta. Dakako, gledano po genetskom kriteriju, no po tipološkom kriteriju indoeuropski jezici nisu evidencijalni jezici[128]. Međutim, evidencijalnih jezika ima barem jednako koliko i indoeuropskih jezika, no gotovo im se nikakva pažnja ne pridaje u logici i filozofiji jezika općenito. Cilj je ovoga rada bio

[127] Za više primjera u prirodnom jeziku v. [39].

[128] Genetskim se kriterijem jezici klasificiraju prema pripadnosti kakvoj jezičnoj porodici. Odnosno, jezici su genetski srodni ako potječu iz istoga prajezika. U slučaju indoeuropskih jezika radi se o indoeuropskom prajeziku. Tipološke klasifikacije pak gledaju zajedničke gramatičke osobitosti u jezicima svijeta, bili oni srodni ili ne, stoga kategorija evidencijalnih jezika obuhvaća međusobno i srodne i nesrodne jezike.

pokazati kako takvi jezici imaju svoje specifičnosti koje se daju obuhvatiti boljim modalnim modifikacijama te na temelju te formalizacije iznjedriti alat za proučavanje takvih jezika.

Prikazali smo razvoj logike opravdanja još od Gödela i intuicionističke tradicije pa sve do logike dokaza.[129]. Smatramo kako je logika dokaza primjerena za jezik matematike, ali ne i za prirodni jezik, gdje evidencija za kakvu tvrdnju ne implicira njezinu istinitost. Međutim, smatramo i kako logika opravdanja može biti dobar temelj takve analize, ali ne u svojem sadašnjem obliku. Evidencijalnost se logički i epistemološki može gledati kao kategorija opravdanja, a opravdanje za kakvu tvrdnju ne mora uvijek značiti i njezinu istinitost. Standardne aksiome logike opravdanja modificirali smo kako bi bolje uhvatili ne samo evidencijalnost kao gramatičku kategoriju nego i samoga govornika u neevidencijalnom jeziku koji može rabiti kakve epistemičke modale za svoje tvrdnje.

Usporedili smo kakve vrste evidencijala postoje u jezicima svijeta te nekoliko studija hijerarhije evidencijalnosti za specifične jezike. Na temelju takvih slučajeva predložili smo opću hijerarhiju mogućih evidencijalnih kategorija u jezicima svijeta, koja se može potom formalno primijeniti i u evidencijalnoj logici. Evidencijalnu logiku odlučili smo graditi postupno – od općega opisa moguće evidencijalnih jezika, preko opisa striktno evidencijalnih jezika pa sve do opisa specifičnoga evidencijalnoga jezika.

Prva logika, $\mathbf{EVL}^-$, razvijena je kao logika koja može pokriti i jezike s epistemičkim modalima, odnosno bilo koji jezik koji na neki način može specificirati izvor dokazne građe za tvrdnju. Smatramo da je razlikovanje između skupa prihvaćenih opravdanja i skupa znanjotvornih opravdanja relevantno kako bismo uspjeli izgraditi sustav koji se bazira ne samo na lingvističkim nego i epistemološkim dosezima. Naime, u prvoj logici uspjeli smo izvesti aksiome epistemične i doksastične logike – analogone standardnih modalnih aksioma – kao teoreme ovoga sustava.

Pritom smo naišli na zanimljivu posljedicu: da bismo mogli izvesti pozitivnu introspekciju, morali smo pretpostaviti da govornik *smatra* da opravdanje koje ima doista i vodi do znanja. Ovdje vjerujemo u racionalnost govornika ne samo u smislu prihvaćanja logičkih posljedica svojega znanja ili vjerovanja (te opravdanja!) nego i u smislu da govornik neće prihvaćati opravdanje ako istodobno ne misli da će ga ono dovesti do znanja. Takva je motivacija intuitivna, ali mogli bismo izgraditi i sustav u kojem pozitivna introspekcija

[129] U vrijeme završavanja ovoga rada izašla je monografija o logici opravdanja [22], čime se nadamo da će se šire logičko i matematičko čitateljstvo upoznati s formalnim sustavima logike opravdanja i logike dokaza.

nije moguća, primjerice prihvatimo li kakvu eksternalističku teoriju znanja, mogli bismo dobiti vjerovanje i znanje proizvedeno pouzdanim procesom, ali govornik ne bi znao da zna nešto, primjerice mogao bi imati opravdanje za kakvu tvrdnju od kakvoga autoriteta (reportativni evidencijal, indirektno opravdanje), ali ne znati doista da zna takvu tvrdnju, primjerice kakav matematički poučak ili aksiom.

Drugu logiku, $\mathbf{EVL}$, izgradili smo na temelju logike $\mathbf{EVL}^-$ i dodali smo joj razlikovanje direktnosti i indirektnosti opravdanja. Naime, proučavajući hijerarhizaciju i klasifikaciju evidencijalnosti, smatramo kako se svi evidencijali mogu podijeliti u dvije temeljne kategorije. U direktne evidencijale ulaze senzorna iskustva, prvenstveno vid, a u indirektne evidencijale ulaze zaključivanje i nesenzorna iskustva, kao što su informacije iz druge ruke, pretpostavke ili pak citati ili zaključivanja iz senzornoga iskustva. To smo u logici izrazili adekvatnim predikatima direktnosti ili indirektnosti za sama opravdanja te ovdje fokus premjestili ne na opravdavajuće formule tipa $t{:}F$ (t opravdava formulu F, odnosno t je evidencijal/opravdanje za tvrdnju F), nego na sama opravdanja (Dt = "opravdanje t jest direktno", It = "opravdanje t jest indirektno"). Na taj način ovom logikom možemo obuhvatiti sve evidencijalne jezike jer svi imaju barem na neki način izraženu takvu opreku, čak i ako se ne ostvaruju svi indirektni ili svi indirektni evidencijali. U takvim jezicima smatramo da direktna opravdanja bivaju prihvaćenima i u skupu su znanjotvornih opravdanja. Za takav slučaj postoje protuprimjeri – npr. halucinacija ili nefunkcioniranje kakvoga senzornoga aparata poput vida – no želimo formalno opisati normalnu i pragmatički idealnu situaciju govorne situacije, u kojoj vjerujemo u pouzdane procese proizvodnje znanja i vjerovanja. Indirektna opravdanja mogu biti prihvaćena i mogu biti znanjotvorna (primjerice kakav dovoljan autoritet iz druge ruke), ali to nije uvijek slučaj.

Treću logiku, $\mathbf{EVL}^+$, razvili smo na temelju specifičnoga evidencijalnoga jezika, tibetskoga. Uveli smo predikat hijerarhije evidencijala, odnosno ako za kakvu tvrdnju postoje dva opravdanja, ono koje je direktno hijerarhijski je važnije od indirektnoga opravdanja. Sam tibetski ima tri vrste evidencijala: direktne, indirektne i egoforne, koji se smještaju između direktnih i indirektnih evidencijala, svojevrsni pojmovno-matematički zor govornika, stoga smo smatrali da je adekvatno interpretirati ih kao opravdanjima za aksiome. U slučaju da bismo u prevođenju možda imali više evidencijala za istu tvrdnju ili u tekstu više istih rečenica s različitim evidencijalima, znali bismo da su ona direktna hijerarhijski važnija i shodno tomu pragmatički relevantnija.

Potonja logika može se modificirati kako bi opisala bilo koji evidencijalni jezik, primjerice za peteročlane evidencijalne sustave možemo uvesti peteromjesni hijerarhijski predikat. Također, možemo ostati na dvomjesnim predikatima i ako se radi o dvama evidencijalima za kakvu tvrdnju, možemo hijerarhijski uspostaviti odnos između bilo kojih dvaju evidencijala. Predikat može shodno tomu postati i tromjestan ili četveromjestan, ovisno o tomu koliko različitih evidencijala želimo komparirati. Analogno tomu mijenjamo i logiku **EVL** uvodeći nove predikate koji će bolje nijansirati temeljnu opreku direktnosti i indirektnosti, odnosno možemo uvesti primjerice predikate reportativnosti, pretpostavke, zaključivanja, zaključivanja iz senzornoga iskustva ili pak nijansirati čak i sama direktna opravdanja na različita senzorna opravdanja, kao što su vid ili sluh. Na taj način vrlo detaljno možemo opisati bilo koji jezik i usporediti, prvenstveno na temelju lingvističke građe, kako se različita opravdanja odnose jedna prema drugima i koja mogu dovesti do istinitosti danih tvrdnji.

Pokazano je kako se sama formalizacija može primijeniti u strojnom prevođenju ili analizi teksta, tako da se vidi koji su evidencijali za tvrdnje češći ili kakav je sveukupni dojam teksta što se tiče egzaktnosti. Isto tako u kombinaciji razmeđa lingvistike, epistemologije i logike moguće je na temelju formalne metode bolje opisati funkcioniranje evidencijala u pragmatičkim situacijama i vidjeti koliko su takvi procesi pouzdani i vode li do istine.

Smatramo kako je evidencijalnost na neki način stvar stupnja. Na jednom su kraju jezici bez evidencijalnosti, ali s epistemičkom modalnošću, gdje izvor dokazne građe nije obligatoran, ali može se izraziti kakvim negramatikaliziranim kategorijama. U sredini je većina evidencijalnih jezika, gdje je evidencijalnost gramatikalizirana i obavezna u većini situacija. Na kraju se nalaze jezici poput tuyuce, koji imaju obligatornu evidencijalnost u svim prilikama te za svaku tvrdnju moramo izreći kakvo opravdanje, odnosno izvor dokazne građe. Međutim, u prirodnim jezicima nema pitanja regresa opravdanja jer se evidencijali obično ne stavljaju na rečenice s već postojećim evidencijalima, a ako se to događa, obično se radi o navodima, gdje se dodaju evidencijali koji označavaju informaciju iz druge ruke. Hipotetski bi rekurzija bila moguća i gramatična, no u svakodnevnoj uporabi takve su situacije govornicima neobične.

U ovom smo se radu priklonili lingvističkoj tezi u kojoj evidencijali ne sudjeluju u promjeni istinitosne vrijednosti rečenice na način na koji to čine epistemički modali, koji vrednuju tvrdnje. Međutim, u formalizaciji na temelju razgraničenja vrsta opravdanja na prihvaćena i ona koja su znanjotvorna, a potom na indirektna i direktna, pri čemu potonja vode do istine i znanja, ipak možemo doći do istine.

Moguć daljnji put istraživanja bio bi, primjerice, razviti neizrazitu (*fuzzy*) logiku u kojem se različit evidencijal, odnosno različito opravdanje za kakvu tvrdnju vrednuje u realnom intervalu $[0, 1]$ te svako opravdanje u nekoj mjeri govori o istinitosti takve tvrdnje. Takav bi put odbacio gore spomenuto lingvističko stajalište o evidencijalima, ali logički, matematički i filozofski bi mogao biti zanimljiv zbog toga što se intuitivno čini da različita opravdanja doista pragmatički i utječu barem na to kako govornik percipira istinitost kakve tvrdnje. U tom slučaju ne moramo niti prihvatiti obavezu evidencijala kao kategorije koja ne utječe na istinitost tvrdnje u standardnom smislu, nego tvrditi da pragmatički iz aspekta govornika ipak daje neku dodatnu informaciju.

U takvoj bismo logici, primjerice, pri zaključivanju preuzeli istinitosnu vrijednost najslabije premise, a u disjunkciji ili zbroju na onu najveću:

- $(t \cdot s) \in_{min(r,r')} \mathcal{E}$
- $(t + s) \in_{max(r,r')} \mathcal{E}$.

Spomenuli smo i kako lojban – umjetni jezik konstruiran s ciljem smanjenja sintaktičkih i semantičkih višeznačnosti – posjeduje sustav evidencijala. Naši bi aksiomatski sustavi mogli pomoći ne samo u boljoj nijansiranosti klasičnih evidencijala prisutnim u prirodnim jezicima (jer lojban ne posjeduje sve spomenute vrste) nego i u mogućnosti hijerarhizacije takvih evidencijala. Naime, u lojbanu nisu formalizirana pravila kombiniranja različitih evidencijala, njihov utjecaj na istinitost rečenice, niti moguće kombinacije. Stoga bi ovakve logike mogle utrti put i za konstrukciju nadogradnje takvih umjetnih jezika.

Shodno tomu, pokazano je kako logička formalizacija – kao svojevrsni umjetni jezik – može poslužiti ne samo za opis prirodnoga jezika s evidencijalima nego i za nadogradnju umjetnoga jezika s evidencijalima. Isto tako pokazano je kako u evidencijalnom jeziku kao što je tibetski postoji i logička tradicija, koja neprecizno opisuje zaključivanje u takvu jeziku, a ujedno se razlikuje od klasične logike europskoga naslijeđa. Pokazali smo kako u lingvističkim opisima ne postoji dovoljno egzaktna formalizacija pravila evidencijalnih hijerarhija, odnosno kako gotovo pa i ne postoje lingvistički radovi koji bi iskoristili logiku kao oruđe za bolji opis zaključivanja u takvim jezicima, a također se evidencijalni jezici dosad, koliko nam je poznato, nisu detaljno proučavali u kontekstu filozofije jezika i logike. Nadamo se da je ova studija tek početak novoga spajanja logike, filozofije i lingvistike, kako bi se razni fenomeni prirodnoga jezika i izvan kategorije evidencijalnosti mogli detaljnije proučiti i opisati.

Bibliografija

[1] Ethnologue: Languages of the world. `https://www.ethnologue.com/`, 2019. pristupljeno 15. listopada 2019.

[2] Achilleos, A. NEXP-completeness and universal hardness results for justification logic. In *Computer Science –Theory and Applications. 10th International Computer Science Symposium in Russia* (2015), L. Beklemishev, D. Musatov, ur., str. 27–52.

[3] Agha, A. *Structural form and utterance context in Lhasa Tibetan: grammar and indexicality in a non-configurational language.* New York: Peter Lang, 1993.

[4] Aikhenvald, A. Evidentiality in Tariana. U *Studies in Evidentiality*, R. M. W. Dixon, A. Aikhenvald, ur. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins Publishing Company, 2003, str. 131–164.

[5] Aikhenvald, A. *Evidentiality.* Oxford: Oxford University Press, 2004.

[6] Aikhenvald, A. 'me', 'us', and 'others': expressing the self in Arawak languages of South America, with a focus on Tariana. U *Expressing the Self: Cultural Diversity and Cognitive Universals*, M. Huang, K. Jaszczolt, ur.: 2018.

[7] Aikin, S. *Epistemology and the Regress Problem.* New York: Routledge, 2011.

[8] Annis, D. A contextualist theory of epistemic justification. *American Philosophical Quarterly 15*, 3 (1978), 213–219. Hrvatski prijevod u [40], *Kontekstualistička teorija epistemičkoga opravdanja.*

[9] Aristotel. *The Works of Aristotle.* Oxford: Clarendon Press, 1928.

[10] Artemov, S. Operational modal logic. Report MSI 95-29, Cornell University, 1995.

[11] Artemov, S. On explicit counterparts of modal logics. Report CFIS 2000-05, Cornell University, 2000.

[12] ARTEMOV, S. Explicit provability and constructive semantics. *Bulletin of Symbolic Logic 7*, 1 (2001), 1–36.

[13] ARTEMOV, S. Introducing justification into epistemic logic. *Journal of Logic and Computation 15*, 6 (2005), 1059–1073.

[14] ARTEMOV, S. Justified common knowledge. *Theoretical Computer Science 357*, 1–3 (2006), 4–22.

[15] ARTEMOV, S. On two models of provability. U *Mathematical Problems from Applied Logics. Logics for the XXIst Century. II.*, D. M. Gabbay, et al., ur.: Springer, 2007, str. 1–52.

[16] ARTEMOV, S. The logic of justification. *The Review of Symbolic Logic 1*, 4 (2008), 477–513.

[17] ARTEMOV, S. Why do we need justification logic? U *Games, Norms and Reasons. Synthese Library (Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science), vol 353.*, J. van Benthem, A. Gupta,, E. Pacuit, ur. Dordrecht: Springer, 2011, str. 266–275.

[18] ARTEMOV, S. The ontology of justifications in the logical setting. *Studia Logica 100*, 1 (2012), 17–30.

[19] ARTEMOV, S. Epistemic modeling with justifications. *CoRR abs/1703.07028* (2018).

[20] ARTEMOV, S. Justification awareness models. In *Logical Foundations of Computer Science. International Symposium, LFCS 2018, Deerfield Beach, FL, USA, January 8–11, 2018, Proceedings* (2018), str. 22–36.

[21] ARTEMOV, S., FITTING, M. Justification logic. U *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. Zalta, ur., zima 2016 izd.: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016.

[22] ARTEMOV, S., FITTING, M. *Justification Logic: Reasoning with Reasons.* Cambridge University Press, 2019.

[23] ARTEMOV, S., IEMHOFF, R. The basic intuitionistic logic of proofs. *Journal of Symbolic Logic 72*, 2 (2007), 439–451.

[24] ARTEMOV, S., NOGINA, E. On epistemic logic with justification. In *Proceedings of the Tenth Conference on the Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge* (2005), R. van der Meyden, ur., str. 279–294.

[25] ARTEMOV, S., YAVORSKAYA, T. On first-order logic of proofs. *Moscow Mathematical Journal 1*, 4 (2001), 475–490.

[26] ARTEMOV, S., YAVORSKAYA, T. First-order logic of proofs. Report TR–2011005, City University of New York, 2011.

[27] BALTAG, A., RENNE, B., SMETS, S. The logic of justified belief, explicit knowledge, and conclusive evidence. *Annals of Pure and Applied Logic 165*, 1 (2014), 49–81.

[28] BARNES, J. Evidentials in the Tuyuca verb. *International Journal of American Linguistics 50*, 3 (1984), 255–271.

[29] BERLIN, B., KAY, P. *Basic Color Terms: Their Universality and Evolution.* Berkeley, CA: University of California Press, 1969.

[30] BLASS, A., GUREVICH, Y., MOSKAL, M., NEEMAN, I. Evidential authorization. U *The Future of Software Engineering*, S. Nanz, ur. Berlin/Heidelberg: 2015, str. 73–99.

[31] BONJOUR, L. *The Structure of Empirical Knowledge.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1985.

[32] BORG, A. Realization theorems for justification logics: Full modularity. In *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods* (2015), H. De Nivelle, ur., Springer International Publishing, str. 221–236.

[33] BPFK (BAUPLA FUZYKAMN, O. Z. P. J. Evidentials (lojban). `https://mw.lojban.org/papri/BPFK_Section:_Evidentials`. pristupljeno 15. listopada 2019.

[34] BREZHNEV, V., KUZNETS, R. Making knowledge explicit: How hard it is. *Theoretical Computer Science 357* (2006), 23–34.

[35] BROUWER., L. E. J. The effect of intuitionism on classical algebra of logic. U *Collected Works 1*, A. Heyting, ur.: North-Holland, 1975.

[36] CAIE, M. Doxastic logic. U *The Open Handbook of Formal Epistemology*, J. Weisberg, R. Pettigrew, ur.: PhilPapers Foundation, 2019, str. 499–541.

[37] CAPLOW, N. The epistemic marking system of émigre Dokpa Tibetan. *Philosophy East and West*.

[38] CAPLOW, N. Inference and deferred evidence in Tibetan. U *Evidential Systems of Tibetan Languages*, L. Gawne, N. Hill, ur.: 2017.

[39] Ceniza, C. Material implication and entailment. *Notre Dame Journal of Formal Logic 29*, 4 (1988), 510–519.

[40] Čuljak, Z. *Vjerovanje, opravdanje i znanje.* Zagreb: Ibis grafika.

[41] Davidson, D. A coherence theory of truth and knowledge. U *Truth And Interpretation, Perspectives on the Philosophy of Donald Davidson*, E. LePore, ur. Oxford: Basil Blackwell, 1986, str. 307–319.

[42] de Groote, P., ur. *The Curry–Howard Isomorphism.* Cahiers du Centre de Logique (Université catholique de Louvain), 1930.

[43] de Haan, F. Evidentiality and epistemic modality: Setting boundaries. *Journal of Linguistics 18* (1999), 83–102.

[44] De Haan, F. The place of inference within the evidential system. *International Journal of American Linguistics 67*, 2 (2001), 193–219.

[45] de Villiers, J., Garfield, J. Evidentiality, questions and the reflection principle in Tibetan: What do children learn when they learn about evidentiality. U *Social Environment and Cognition in Language Development*, F. Ketrez, et al., ur.: 2017.

[46] DeLancey, S. Lhasa Tibetan evidentials and the semantics of causation. In *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the Berkeley Linguistics Society*, M. Niepokuj, ur.

[47] DeLancey, S. Evidentiality and volition in Tibetan. U *Evidentiality: The Linguistic Coding of Epistemology*, W. Chafe, J. Nichols, ur.: 1992.

[48] DeLancey, S. Evidentiality in Tibetic. U *The Oxford Handbook of Evidentiality*, A. Aikhenvald, ur. Oxford: Oxford University Press, 2018, str. 1–22.

[49] DeRose, K. Contextualism and knowledge attributions. *Philosophy and Phenomenological Research 15*, 4 (1992), 913–929.

[50] Descartes, R. *Meditacije o prvoj filozofiji.* Hrvatski Leskovac: Kruzak, 2015.

[51] Dožudić, D. Restricting the restriction of the propositional attitude class. *Croatian Journal of Philosophy 15*, 1 (2015), 17–39.

[52] Dunne, J. *Foundations of Dharmakīrti's Philosophy.* Cambridge, MA: Wisdom Publications, 2004.

[53] Fagin, R., Halpern, J., Moses, Y., Vardi, M. *Reasoning About Knowledge.* Cambridge, MA: The MIT Press, 1951.

[54] Faller, M. Remarks on evidential hierarchies. U *The Construction of Meaning*, D. Beaver, et al., ur.: 2002, str. 89–111.

[55] Faller, M. *Semantics and Pragmatics of Evidentials in Cuzco Quechua.* Doktorska disertacija, Stanford University, 2002.

[56] Faller, M. Evidentiality and epistemic modality at the semantics/pragmatics interface. http://web.eecs.umich.edu/ rthomaso/lpw06/fallerpaper.pdf, 2006. pristupljeno 15. listopada 2019.

[57] Fantl, J. Modest infinitism. *Canadian Journal of Philosophy 33*, 4 (2003), 537–562.

[58] Feldman, R., Conee, E. Evidentialism. *Philosophical Studies*.

[59] Fitting, M. The logic of proofs, semantically. *Annals of Pure and Applied Logic 132* (2005), 1–25.

[60] Fitting, M. A quantified logic of evidence. *Annals of Pure and Applied Logic 152*, 1–3 (2008), 67–83.

[61] Fitting, M. Realizations and LP. *Annals of Pure and Applied Logic 161*, 3 (2009), 368–387.

[62] Fitting, M. Justification logics and hybrid logics. *Journal of Applied Logic 8*, 4 (2010), 356–370.

[63] Fitting, M. Justification logics and realization. Report TR-2014004, City University of New York, 2014.

[64] Fitting, M. Possible world semantics for the first order LP. *Annals of Pure and Applied Logic 165* (2014), 225–240.

[65] Fitting, M. Modal logics, justification logics, and realization. *Annals of Pure and Applied Logic 167*, 8 (2015), 615–648.

[66] Fitting, M., Salvatore, F. First-order justification logic with constant domain semantics. *CoRR abs/1808.09875* (2018).

[67] Flood, G. *An Introduction to Hinduism.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1996.

[68] Frajzyngier, Z. Truth and the indicative sentence. *Studies in Language 9* (1985), 243–254.

[69] Garret, E. *Evidentiality and Assertion in Tibetan.* Doktorska disertacija, University of California, Los Angeles, 2001.

[70] Garson, J. W. *Modal Logic for Philosophers.* New York: Cambridge University Press, 2006.

[71] Garson, J. W. *What Logics Mean: From Proof Theory to Model-Theoretic Semantics.* New York: Cambridge University Press, 2006.

[72] Gawne, L. Egophoric evidentiality in Bodish languages. U *Evidential Systems of Tibetan Languages*, L. Gawne, N. Hill, ur.: 2017.

[73] Gödel, K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls. U *Kurt Gödel Collected Works. Volume I (1986)*, S. Feferman, ur. Oxford: Oxford University Press, 1933, str. 301–303. Ergebnisse Math. Kolloq., 4:39–40.

[74] Gödel, K. Vortrag bei Zilsel. U *Kurt Gödel Collected Works. Volume III (1995)*, S. Feferman, ur. Oxford: Oxford University Press, 1938, str. 86–13.

[75] Gettier, E. Is justified true belief knowledge? *Analysis 23*, 6 (1963), 121–123. Hrvatski prijevod u [40], *Je li opravdano istinito vjerovanje znanje?*

[76] Givón, T. Evidentiality and epistemic space. *Studies in Language 6*, 1 (2006), 23–49.

[77] Gödel, K. What is Cantor's continuum problem? U *Kurt Gödel: Collected Works, Vol. II*, S. Feferman, et al., ur. New York/Oxford: Oxford University Press, 1990, str. 254–270.

[78] Gokhale, P. The Cārvāka theory of pramāṇas: A restatement. *Philosophy East and West 43*, 4 (1993), 675–682.

[79] Goldman, A. Innate knowledge. U *Innate Ideas*, S. Stich, ur. Berkeley: University of California Press, 1979, str. 111–120.

[80] Goldman, A. What is justified belief? U *Justification and Knowledge*, G. Pappas, ur. Dordrecht: Reidel, 1979, str. 1–25.

[81] Goris, E. Explicit proofs in formal provability logic. In *Logical Foundations of Computer Science, International Symposium, LFCS 2007, New York, NY, USA,*

June 4–7, 2007, Proceedings (Berlin, 2007), S. Artemov, A. Nerode, ur., Springer, str. 241–253.

[82] Gurevich, Y. The intrinsic logic of information. 4th UNILOG Rio de Janeiro, Brazil (7. travnja 2013.), pozvano predavanje.

[83] Halpern, J., Samet, D., Segev, E. Defining knowledge in terms of belief: The modal logic perspective. *The Review of Symbolic Logic 2*, 3 (2009), 469–487.

[84] Hardman, M. Data-source marking in the Jaqi languages. U *Evidentiality: The Linguistic Coding of Epistemology*, W. Chafe, J. Nichols, ur. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Company, 1986, str. 113–136.

[85] Hempel, C. G. On the logical positivists' theory of truths. *Analysis 2* (1935), 49–59.

[86] Hendricks, V., Symons, J. Epistemic logic. U *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. Zalta, ur., jesen 2015 izd.: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2015.

[87] Heyting, A. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930.

[88] Heyting, A. *Mathematische Grundlagenforschung Intuitionismus, Beweistheorie.* Springer, 1934.

[89] Hill, N. Contextual semantics of Lhasa Tibetan evidentials. *SKASE Journal of Theoretical Linguistics 10*, 3 (2012), 47–54.

[90] Hintikka, J. *Knowledge and Belief.* Ithaca: Cornell University Press, 1962.

[91] Hintikka, J. Impossible possible worlds vindicated. *Journal of Philosophical Logic 4* (1975), 475–484.

[92] Ichikawa, J. J., Steup, M. The analysis of knowledge. U *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. Zalta, ur., zima 2018 izd.: 2018.

[93] Izvorski, R. The present perfect as an epistemic modal. *Semantics and Linguistic Theory*.

[94] Jäschke, H. A. *A Short Practical Grammar of the Tibetan Language, with Special Reference to the Spoken Dialects.* London: Hardinge Simpole, 2004. Pretisak iz 2004.

[95] Kalsang, Garfield, J., Speas, M., de Villiers, J. Direct evidentials, case, tense and aspect in Tibetan: Evidence for a general theory of the semantics of evidential. *Natural Language and Linguistic Theory 31*, 2 (2013), 517–561.

[96] Klein, P. Foundationalism and the infinite regress of reasons. *Philosophy and Phenomenological Research 58* (1998), 919–926. Hrvatski prijevod u [40], *Fundacionalizam i beskonačan regres razloga.*

[97] Kolmogoroff, A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. *Mathematische Zeitschrift 35* (1932), 58–65.

[98] Kovač, S. Modal collapse in Gödel's ontological proof. U *Ontological Proofs Today*, M. Szatkowski, ur. Heusenstamm: 2012, str. 323–343.

[99] Kovač, S. *Svojstva klasične logike.* Zagreb: Hrvatski studiji Sveučilišta u Zagrebu, 2013.

[100] Kovač, S. Causal interpretation of Gödel's ontological proof. U *Gödel's Ontological Argument: History, Modifications and Controversies*, K. Świętorzecka, ur. Warszava: 2015, str. 163–202.

[101] Kovač, S. On causality as the fundamental concept of Gödel's philosophy. *Synthese 4* (2020), 1803–1838.

[102] Kraus, Sarit i Lehmann, D. Knowledge, belief and time. In *Proceedings of the 13th Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming, Rennes, LNCS 226* (1986), L. Kott, ur., str. 186–195.

[103] Kuznets, R. On the complexity of explicit modal logics. In *Computer Science Logic, 14th International Workshop, CSL 2000, Annual Conference of the EACSL, Fischbachau, Germany, August 21–26, 2000, Proceedings* (2006), H. S. P. Clote, ur.

[104] Lakoff, G. *Women, Fire, and Dangerous Things.* Chicago: University of Chicago Press, 1987.

[105] Lehrer, K. *The Structure of Empirical Knowledge.* New York: Oxford University Press, 1974.

[106] Levenshtein, V. I. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Doklady Akademii Nauk SSSR 163*, 4 (1965), 845–848.

[107] Lojkić, G. *Razgranata teorija tipova kao intenzionalna logika.* Doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[108] Maretić, T. *Gramatika hrvatskoga ili srpskoga književnog jezika.* Zagreb: Matica hrvatska, 1963.

[109] Matasović, R. *Uvod u poredbenu lingvistiku.* Zagreb: Matica hrvatska, 2001.

[110] Matasović, R., Gnjatović, T. Evidencijalne strategije u hrvatskom jeziku. U *Sintaksa padeža*, M. Birtić, D. Brozović Rončević, ur.: Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje i Filozofski fakultet u Osijeku, 2010, str. 89–99.

[111] Matthewson, L., Davis, H., Rullmann, H. Evidentials as epistemic modals: Evidence from St'át'imcets. *Linguistic Variation Yearbook 7* (06 2007), 201–254.

[112] McKay, T. Propositional attitude reports. U *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. Zalta, ur., jesen 2015 izd.: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2015.

[113] McKinsey, J. C. C., Tarski, A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *Journal of Symbolic Logic 13*, 1 (1948), 1–15.

[114] Meyer, J.-J. C. Modal epistemic and doxastic logic. U *Handbook of Philosophical Logic, Vol. 10*, D. M. Gabbay, F. Guenthner, ur.: Springer-Science+Business Media, B.V, 2003, str. 1–38.

[115] Mkrtychev, A. Models for the logic of proofs. U *Logical Foundations of Computer Science '97, Yaroslavl'*, S. Adian, A. Nerode, ur.: Springer, 1997, str. 266–275.

[116] Mohan, D. D. *The Six Ways of Knowing: A Critical Study of the Vedanta Theory of Knowledge.* Princeton University Press, 1960.

[117] Murray, S. Evidentiality and the structure of speech acts. Diplomski rad, Rutgers, The State University of New Jersey, New Brunswick, New Jersey, 2010.

[118] Neurath, O. Protocol sentences. U *Logical Positivism*, A. Ayer, ur. New York: Free Press, 1959, str. 199–208.

[119] Nogina, E. On logic of proofs and provability. *Bulletin of the Section of Logic 12*, 2 (2006), 356.

[120] Nuyts, J. *Epistemic Modality, Language, and Conceptualization: A Cognitive-Pragmatic Perspective.* Amsterdam: John Benjamins Publishing Company, 2001.

[121] Oswalt, R. The evidential system of Kashaya. U *Evidentiality: The Linguistic Coding of Epistemology*, W. Chafe, J. Nichols, ur. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Company, 1986, str. 29–45.

[122] Pacuit, E. A note on some explicit modal logics. In *Proceedings of the Fifth Panhellenic Logic Symposium*, C. Dimitracopoulos, ur.

[123] Perrett, R. W. The problem of induction in Indian philosophy. *Philosophy East and West*.

[124] Peterson, T. R. G. *Epistemic Modality and Evidentiality in Gitksan at the Semantics-Pragmatics Interface.* Doktorska disertacija, The University of British Columbia, Vancouver, 2010.

[125] Plantinga, A. *Warrant and Proper Function.* Oxford: Oxford University Press, 1993.

[126] Platon. *The Theaetetus of Plato.* Oxford: Oxford University Press, 1883.

[127] Potter, K. H. *The Encyclopedia of Indian Philosophies, Volume 2: Indian Metaphysics and Epistemology: The Tradition of Nyaya-Vaisesika up to Gangesa.* Princeton University Press, 1977.

[128] Quine, W. V., Ullian, J. *The Web of Belief.* New York: Random House, 1970.

[129] Quine, W. V. O. *Word and Object.* Cambridge, MA: MIT Press, 1960.

[130] Rantala, V. Urn models: A new kind of non-standard model for first-order logic. *Journal of Symbolic Logic 4* (1975), 455–474.

[131] Restović, I. *Logičko-pojmovna struktura Brouwerova intuicionizma.* Doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2019.

[132] Rieger, A. Moore's paradox, introspection and doxastic logic. *Thought 1* (2015), 215–227.

[133] Rogers, K. *Tibetan Logic.* Snow Lion, 2009.

[134] Rubtsova, N. Evidence-based knowledge for S5. In *2005 Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Logic Colloquium '05, Athens, Greece, July 28–August 3, 2005*, C. Dimitracopoulos, et al., ur.

[135] Rubtsova, N. On realization of S5-modality by evidence terms. *Journal of Logic and Computation –LOGCOM 16* (2006), 671–684.

[136] Sauerland, U., Schenner, M. Embedded evidentials in Bulgarian. In *Proceedings of Sinn und Bedeutung 11* (2007), E. Puig-Waldmüller, ur., Universitat Pompeu Fabra, str. 525–539.

[137] Schenner, M. Semantic complexity of evidentials: Some typological parameters. In *Proceedings of LingO 11* (Barcelona, Universitat Pompeu Fabra, 2008), M. Kokkonidis, ur., str. 525–539. citirano prema <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.579.4706>.

[138] Schlick, M. The foundation of knowledge. U *Logical Positivism*, A. Ayer, ur. New York: Free Press, 1959, str. 199–208.

[139] Sellars, W. Givenness and explanatory coherence. *Journal of Philosophy 70* (1973), 612–624.

[140] Skansi, S. *Logika i dokazi.* Zagreb: Element, 2019.

[141] Smiley, T. The logical basis of ethics. *Acta Philosophica Fennica 16* (1963), 237–246.

[142] Smullyan, R. M. Logicians who reason about themselves. In *Proceedings of the 1986 Conference on Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge* (San Francisco, CA, USA, 1986), J. Halpern, ur., TARK '86, Morgan Kaufmann Publishers Inc., str. 341–352.

[143] Solovay, R. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics 25* (1976), 287–304.

[144] Sosa, E. The coherence of virtue and the virtue of coherence: Justification in epistemology. *Synthese 64*, 1 (1985), 3–28.

[145] Steup, M. Epistemology. U *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. Zalta, ur., zima 2018 izd.: 2018.

[146] Stich, S. *The Fragmentation of Reason.* Cambridge: MIT Press, 1990.

[147] Su, Q., Huang, C.-R., Chen, H. K.-y. Evidentiality for text trustworthiness detection. In *Proceedings of the 2010 Workshop on NLP and Linguistics: Finding the Common Ground* (Stroudsburg, PA, USA, 2010), NLPLING '10, Association for Computational Linguistics, str. 10–17.

[148] Tillemans, T. Formal and semantic aspects of Tibetan Buddhist debate logic. *Journal of Indian Philosophy 17*, 3 (1989), 265–297.

[149] Tillemans, T. Tibetan philosophy. U *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, E. Craig, ur.: 1998.

[150] Tillemans, T. *Scripture, Logic, Language: Essays on Dharmakirti and His Tibetan Successors*. Somerville, MA: Wisdom Publications, 1999.

[151] Tribur, Z. Observations on factors affecting the distributional properties of evidential markers in Amdo Tibetan. U *Evidential Systems of Tibetan Languages*, L. Gawne, N. Hill, ur.: 2017.

[152] Troelstra, A., van Dalen, D. *Constructivism in Mathematics, Vol 1, Volume 121*. Elsevier Science, 1988.

[153] Troelstra, A. S. A history of constructivism in the 20th century. U *ITLI Prepublication Series ML-91-05*: University of Amsterdam, 1991.

[154] Turner, M. *Death is the Mother of Beauty: Mind, Metaphor, Criticism*. Chicago: University of Chicago Press, 1987.

[155] van Benthem, J. Reflections on epistemic logic. *Logique and Analyse 133–134* (1993), 5–14.

[156] van der Hoek, W. Systems for knowledge and belief. *Journal of Logic and Computation 3*, 2 (1993), 173–195.

[157] van Ditmarsch, H., Halpern, J., van der Hoek, W., Kooi, B. *Handbook of Epistemic Logic*. College Publications, 2015.

[158] Vokurková, Z. *Epistemic Modalities in Spoken Standard Tibetan*. Doktorska disertacija, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy – Universite Paris 8, 2008.

[159] von Wright, G., H. *An Essay on Modal Logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1951.

[160] Watson, J. C. Epistemic justification. U *Internet Encyclopedia of Philosophy*, J. Fieser, B. Dowden, ur., 2016 izd.: 2016.

[161] Widmer, M. Same same but different: On the relationship between egophoricity and evidentiality. U *Evidentiality, egophoricity, and engagement*, H. Bergqvist, S. Kittilä, ur. Berlin: Language Science Press, 2020, str. 263–287.

[162] Willett, T. A cross-linguistic survey of the grammaticization of evidentiality. *Studies in Language 12*, 1 (1988), 51–97.

[163] Williamson, T. *Knowledge And Its Limits*. Oxford: Clarendon Press, 2000.

[164] Wittgenstein, L. *Philosophical Investigations*. Oxford: Basil Blackwell, 1953.

[165] Yavorskaya, T. Logic of proofs and provability. *Annals of Pure and Applied Logic 113* (2001), 345–372.

[166] Zagzebski, L. Virtue in ethics and epistemology. *American Catholic Philosophical Quarterly 71*, 1 (1997), 1–17.

Životopis autorice

Kristina Šekrst rođena je 10. srpnja 1987. u Zagrebu. Bila je prvi i jedini student poredbene lingvistike na Sveučilištu u Zagrebu, a završila je usto i kognitivnu lingvistiku te jezikoslovni smjer kroatistike. Interes joj se potom razvio za logiku te je diplomirala s temom o logici opravdanja, što se proširilo suradnjom na projektu *Logika, pojmovi i komunikacija* (Hrvatska zaklade za znanost, voditelj prof. dr. sc. Srećko Kovač), u sklopu kojega je i nastala ova disertacija. Autorica je jedne monografije *Staroegipatski jezik: gramatika, pismo i lingvistički uvod* (s Igorom Uranićem). Objavila je radove i izlagala na konferencijama, tribinama i radionicama u području lingvistike, egiptologije, fizike, filozofije, logike, astronomije i računarstva.[130] Suvoditeljica je projekta *Zagrebačka egiptološka škola* u sklopu Arheološkoga muzeja u Zagrebu. Na Sveučilištu u Zagrebu predavala je na kolegiju *Filozofski problemi kozmologije i astrobiologije*[131],*Srednjoegipatski jezik i pismo*[132] te *Akademska pismenost*.[133] Radila je kao razvojni inženjer na projektu računalnoga vida (Visage Technologies u suradnji s Fakultetom elektrotehnike i računarstva), kao glavni razvojni inženjer na optimizaciji i automatizaciji poslovnih procesa u sklopu strojnoga učenja (KnowIT, Zagreb), a trenutačno je softverski konzultant za optimizaciju poslovnih procesa, analitiku i napredne metode strojnoga učenja (PlanIt SCM, San Francisco Bay Area). Volontira u udrugama za zaštitu životinja[134] te na *online*-kolegijima Caltecha, Harvarda te University of Illinois na Courseri i edx-u kao mentor[135]. Područja interesa: logika, poredbena lingvistika (indoeuropeistika, afrazijistika), računska složenost, strojno učenje, algoritmi i strukture podataka, kozmologija, astrobiologija.

[130] Potpun popis radova dostupan je na URL-u: <http://bib.irb.hr/lista-radova?autor=-334167>

[131] S doc. dr. sc. T. Janovićem 2014./2015 – 2017./2018.

[132] S I. Uranićem 2013./2014. – 2015./2016. te samostalno od 2016./2017.

[133] Nositelj doc. dr. sc. Sandro Skansi, vježbe.

[134] Prava šapa 2016. – 2018. te Udruga Sklonište dobrote i Projekt Castro 2018. do danas.

[135] *Science of the Solar System* (Caltech, coursera.org), od ožujka 2016. do danas, *Genomics* (Coursera, University of Illinois, 2017. – 2019.) te *Super-Earths and Life* (Harvard, edx.org) od 2015. do 2017.